

# Diffuse Mehrfachstreuung zwischen drei Schichten wolkiger Atmosphäre und dem Boden (Drei plus eins Schichtenmodell)

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 17. März, corr. 19. März 2019

Gegeben sei eine planparallele Atmosphäre, die aus drei übereinanderliegenden horizontal homogenen teilbewölkten Atmosphärenschichten besteht und einem horizontal homogenen Boden. Unter der vereinfachenden Annahme von diffuser und isotroper kurzwelliger<sup>1</sup> Breitband-Strahlung, die nur in vertikaler Richtung wirke, wird die am Boden ankommende Strahlung<sup>2</sup> berechnet: zunächst unter der Annahme einer rein extraterrestrischen Strahlungsquelle, dann unter der Annahme einer rein terrestrischen Strahlungsquelle. Dies ist eine Erweiterung des in Thaler (2018) vorgestellten Zweischichtenmodells. Die Lösung des Gleichungssystems erfolgte hier mit dem Computeralgebrasystem Maxima (2017). Eine mögliche Anwendung wäre die Abschätzung nächtlicher Beleuchtungsstärken unter Zuhilfenahme numerischen *model outputs* für den Bedeckungsgrad in drei Wolkenschichten und für den Bodenzustand.

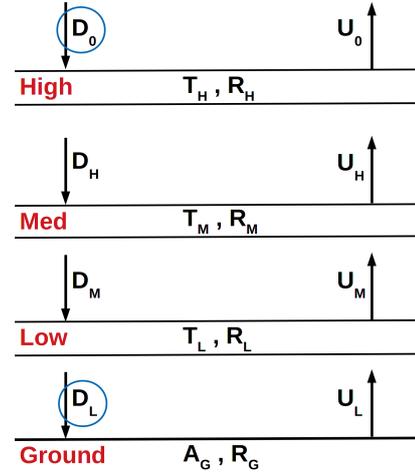


Abbildung 1: Mehrfach reflektierte und transmittierte von oben ankommende diffuser Strahlung  $D_0$  zwischen dreifach geschichteter teilbewölkter Atmosphäre und dem Boden. Gesucht wird die von oben den Boden erreichende Strahlung  $D_L$ .

## 1 Extraterrestrische Strahlungsquelle

Die Darstellung folgt grob der in Bohren and Clothiaux (2006, S. 241 ff.) präsentierten und hier verallgemeinerten Methode. Die Atmosphäre bestehe aus drei vertikalen Schichten, die für die Ebene der hohen ( $H$ ), der mittelhohen ( $M$ ) und der tiefen Bewölkung ( $L$ ) stehen. Ganz unten befindet sich die Bodenschicht ( $G$ ). Strahlung kann durch jede dieser Schichten transmittiert ( $T$ ), reflektiert ( $R$ ) oder absorbiert ( $A$ ) werden. Es gilt allgemein

$$T_i + R_i + A_i = 1, \quad i \in \{H, M, L, G\}. \quad (1)$$

Das heißt, dass das Wertepaar diffuse Transmissionsrate<sup>3</sup>  $T_i$  und diffuse Reflexionsrate<sup>3</sup>  $R_i$  jede Schicht im Rahmen der Approximationen vollständig definiert. Gemäß Abbildung (1) wird die von oben ankommende extraterrestrische Strahlung mit  $D_0$  bezeichnet. Gesucht ist die am Boden von oben ankommende Nettostrahlung  $D_L$ . Berücksichtigt man für jeden einzelnen gerichteten Strahlungsfluss in jeder Schicht den Umstand, dass er sich aus einem transmittierten und einem reflektierten Anteil zusammensetzt, dann findet man für die sieben Strahlungsflüsse  $D_H, D_M, D_L, U_0, U_H, U_M, U_L$  folgende sieben lineare Gleichungen:

$$\begin{aligned} D_H &= D_0 T_H + U_H R_H \\ D_M &= D_H T_M + U_M R_M \\ D_L &= D_M T_L + U_L R_L \\ U_0 &= U_H T_H + D_0 R_H \\ U_H &= U_M T_M + D_H R_M \\ U_M &= U_L T_L + D_M R_L \\ U_L &= D_L R_G. \end{aligned} \quad (2)$$

Die Auflösung des Gleichungssystems mit *Maxima* nach  $D_L$  (siehe Unterabschnitt 4.1 auf Seite 3) ergibt

$$D_L = D_0 \frac{T_L T_M T_H}{1 - \Psi_0} \quad (3)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_0 = & + R_G R_H T_L^2 T_M^2 - R_G R_H R_L^2 T_M^2 + R_H R_L T_M^2 - \\ & - R_G R_H R_M^2 T_L^2 + R_G R_M T_L^2 + R_G R_H R_L^2 R_M^2 - \\ & - R_H R_L R_M^2 - R_G R_L^2 R_M - R_G R_H R_L R_M + \\ & + R_L R_M + R_H R_M + R_G R_L. \end{aligned} \quad (4)$$

<sup>1</sup>im quais-sichtbaren Spektralbereich

<sup>2</sup>radiometrisch als Strahlungsflussdichte in  $W/m^2$  oder photometrisch als Beleuchtungsstärke in lx

<sup>3</sup>In Hinkunft oft nur kurz *Transmission* bzw. *Reflexion* genannt

Setzt man für zwei der drei Atmosphärenschichten die Transmission auf 100 %, also z.B.  $T_H = T_M = 1$  und die entsprechenden diffuse Reflexion auf  $R_H = R_M = 0$ , dann erhält man

$$D_L = D_0 \frac{T_L}{1 - R_G R_L} .$$

Das entspricht der Gleichung (5) in Thaler (2018) für das vereinfachte Atmosphären-Boden-Modell, was als Hinweis auf die Korrektheit der Beziehung (3) hier im Text gelten kann.

## 2 Strahlungsquelle am Boden

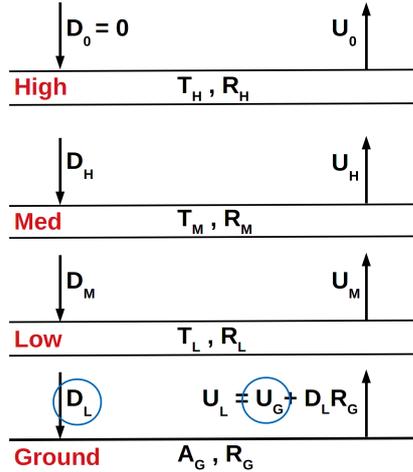


Abbildung 2: Mehrfach reflektierte und transmittierte vom Boden ausgehende diffuse Strahlung  $U_G$  zwischen dreifach geschichteter teilbewölkter Atmosphäre und dem Boden. Gesucht wird die zum Boden zurück gestreute Strahlung  $D_L$ .

Alternativ betrachten wir nun den Fall mit der Strahlungsquelle am Boden unter Vernachlässigung extraterrestrischer Einstrahlung. Nach Abbildung (2) lässt sich daraus folgendes lineares Gleichungssystem mit den sieben Unbekannten  $D_H, D_M, D_L, U_0, U_H, U_M, U_L$  bei gegebenem  $U_G$  (und  $D_0 = 0$ ) darstellen:

$$\begin{aligned} D_H &= U_H R_H \\ D_M &= D_H T_M + U_M R_M \\ D_L &= D_M T_L + U_L R_L \\ U_0 &= U_H T_H \\ U_H &= U_M T_M + D_H R_M \\ U_M &= U_L T_L + D_M R_L \\ U_L &= U_G + D_L R_G . \end{aligned} \quad (5)$$

Die Auflösung nach  $D_L$  erfolgt wieder mit *Maxima* (siehe Unterabschnitt 4.2 auf der nächsten Seite). Sie lautet:

$$D_L = U_G \frac{\Psi_1}{1 - \Psi_0} \quad (6)$$

mit

$$\begin{aligned} \Psi_1 = & + R_H T_L^2 T_M^2 - R_H R_L^2 T_M^2 - R_H R_M^2 T_L^2 + R_M T_L^2 + \\ & + R_H R_L^2 R_M^2 - R_L^2 R_M - R_H R_L R_M + R_L \end{aligned} \quad (7)$$

und mit  $\Psi_0$  von Gleichung (4) auf der vorherigen Seite. Abermals lässt sich ein Spezialfall ableiten, wenn man z.B.  $T_H = T_M = 1$  bzw.  $R_H = R_M = 0$  setzt:

$$D_L = U_G \frac{R_L}{1 - R_G R_L} .$$

Diese Beziehung ist nun wiederum identisch mit der Gleichung (11) in Thaler (2018), welche das Atmosphäre-Boden-Modell für Strahlungsemission vom Boden ausgehend beschreibt. Dieser Spezialfall stützt das Vertrauen in das Ergebnis von Gl. (6) hier im Text.

## 3 Wolken- und Bodenparameterisierung

Die  $T_i$  und  $R_i$  sind bislang noch unbestimmt. Man benötigt zu ihrer Bestimmung weitere Annahmen.

1. Für die Atmosphärenschichten wird von Absorption abgesehen. Für die Transmission gilt dann

$$T_i = 1 - R_i . \quad (8)$$

Die Bestimmung der diffusen Reflexion allein ist also ausreichend.

2. Für die diffuse Reflexion teilbewölkter Atmosphärenschichten kann man dann folgenden Ansatz wählen (wie schon in Thaler, 2018, Gl. 8):

$$R_i = \underbrace{N_i \alpha_{c,i}}_{\text{Wolken}} + \underbrace{(1 - N_i) \alpha_{a,i}}_{\text{wolkenfreie Atmosphäre}} \quad (9)$$

mit  $i \in \{H, L, M\}$  und mit dem Bedeckungsgrad  $0 \leq N_i \leq 1$  der jeweilige Schicht. Die  $\alpha_{c,i}$  und  $\alpha_{a,i}$  sind die Albedowerte der Wolken bzw. der wolkenfreien Atmosphäre in der Schicht  $i$ . Der Ansatz berücksichtigt somit für jede Atmosphärenschicht die diffuse Reflexion an Wolken und an der wolkenfreien Atmosphäre.

3. Durch den Boden hindurch kommt es trivialerweise zu keiner Transmission von Strahlung, daher genügt hier wegen  $A_G = 1 - R_G$  ein passender Wert für die Bodenbedo zur vollständigen Bestimmung:

$$R_G = \alpha_G . \quad (10)$$

Die Einzelalbeden  $\alpha_{a,i}, \alpha_{c,i}, \alpha_G$  können in passabler Näherung der Literatur entnommen werden<sup>4</sup>. Mit den bisherigen Ausführungen ist es dann möglich, aus Bewölkungsprognosen numerischer Modelle, die in drei Schichten *hoch, mittel* und *tief* vorliegen, gemeinsam mit Bodenzustandsprognosen bei gegebenem Strahlungsinpult die Strahlungsflussdichten bzw. Beleuchtungsstärken am Boden zu berechnen.

## 4 Maxima-Batch-Jobs

Die nachstehenden Befehle können in eine Datei geschrieben und über das Maxima-Kommando *batch(„filename“)* geladen und ausgeführt werden.

<sup>4</sup>Für eine Zusammenstellung: [foehnwall.at/multiplescattering1.html#albedo-values](http://foehnwall.at/multiplescattering1.html#albedo-values)

## 4.1 Lösung des Systems (2)

Folgende Maxima-Kommandos führen zum Ergebnis gemäß Gleichung (3):

```
sys: [  
D_H=D_0*T_H+U_H*R_H,  
D_M=D_H*T_M+U_M*R_M,  
D_L=D_M*T_L+U_L*R_L,  
U_0=U_H*T_H+D_0*R_H,  
U_H=U_M*T_M+D_H*R_M,  
U_M=U_L*T_L+D_M*R_L,  
U_L=D_L*R_G];  
loes: solve(sys, [U_0,U_H,U_M,U_L,D_H,D_M,D_L])$  
DL: loes[1][7]$  
expand(DL);
```

## 4.2 Lösung des Systems (5)

Folgende Maxima-Kommandos führen zum Ergebnis gemäß Gleichung (6):

```
sys: [  
D_H=U_H*R_H,  
D_M=D_H*T_M+U_M*R_M,  
D_L=D_M*T_L+U_L*R_L,  
U_0 = U_H*T_H,  
U_H=U_M*T_M+D_H*R_M,  
U_M=U_L*T_L+D_M*R_L,  
U_L=U_G+D_L*R_G];  
loes: solve(sys, [U_0,U_H,U_M,U_L,D_H,D_M,D_L])$  
DL: loes[1][7]$  
factor(DL);
```

## Symbole

|  |  |
|--|--|
| $\alpha_{c,i}, \alpha_{a,i}, \alpha_G$ | Albedo von Wolken, von der wolkenfreien Atmosphäre (der Schicht $i$ ) und des Bodens |
| $A_i$                                  | Absorptionsraten ( $0 \leq A_i \leq 1$ )   |
| $D_i$                                  | Von oben nach unten gerichtete Strahlungsflussdichten bzw. Beleuchtungsstärken       |
| $N_i$                                  | Bewölkungsgrad der Schicht $i$ ( $0 \leq N_i \leq 1$ )                               |
| $R_i$                                  | diffuse Reflexionsraten ( $0 \leq R_i \leq 1$ )                                      |
| $T_i$                                  | diffuse Transmissionsraten ( $0 \leq T_i \leq 1$ )                                   |
| $U_i$                                  | Von unten nach oben gerichtete Strahlungsflussdichten bzw. Beleuchtungsstärken       |

## Literatur

Craig F. Bohren and Eugene F. Clothiaux. *Fundamentals of Atmospheric Radiation. An introduction with 400 Problems.* Wiley-VCH Verlag, Weinheim, 2006.

Maxima. *Maxima, a Computer Algebra System. Version 5.41.0.* <http://maxima.sourceforge.net/>, 2017.

Dietmar Thaler. *Diffuse Mehrfachstreuung zwischen wolki-ger Atmosphäre und dem Boden - Ein Zweischichtenmodell.* <http://wannenbriefe.foehnwall.at/> (Nr. 4), November 2018.