Der Pseudogeostrophische Wind

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 27. Mai 2019 (corr. 28. Mai, 9. Juni und 14. Jan. 2021)

Der pseudogestrophische Wind ist eine implizite Lösung der zweidimensionalen stationären und isobaren Bewegungsgleichung für den synoptischen Scale. In Standardlehrbüchern kaum beachtet, stellt er den allgemeinen Fall dar, aus dem sich je nach spezieller Annahme der ganze Zoo zweidimensionaler stationärer Windfeldapproximationen herleiten lässt: Trägheitswind, geostrophischer Wind, zyklostrophischer Wind, Gradientwind. Der allgemeine Lösungsansatz bietet Einblicke in die Dynamik von Jetstreams. Darüber hinaus bildet er ein motivierendes Beispiel für die Entwicklung der sogenannten *Energie-Wirbel-Theorie*.

1 Herleitung

Ausgangspunkt ist die stationäre[1] und isobare[2] horizontale Bewegungsgleichung für den synoptischen Scale auf der Tangentialebene im p-System ohne Reibung (z.B.: Holton, 2004, S. 58):

$$\cancel{\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial t}} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \mathbf{v}_h + \omega \cancel{\frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial p}} = -f\mathbf{k} \times \mathbf{v}_\mathrm{h} - \nabla_\mathrm{h}\Phi\,. \tag{1}$$

Die *Weber-Transformation*[3] (z.B.: Holton, 2004, S. 498) lautet für 2-dimensionale Strömungen

$$\mathbf{v}_\mathrm{h} \cdot \nabla_\mathrm{h}\mathbf{v}_\mathrm{h} = \frac{1}{2}\nabla \mathbf{v}_\mathrm{h}^2 + \zeta \mathbf{k} \times \mathbf{v}_\mathrm{h} \tag{2}$$

($\zeta = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$, relative Vorticity). Setzt man die Beziehung (2) für den horizontalen Geschwindigkeitsadvektionsterm in Gleichung (1) ein und formt ein wenig um, dann erhält man die *peudogeostrophische Relation*

$$\underbrace{(\zeta + f)}_{\eta}\, \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h = -\nabla_h \underbrace{\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}^2 + \Phi\right)}_{E_\mathrm{m} = K + \Phi}\,. \tag{3}$$

mit der absoluten Vorticity $\eta = \zeta + f$, der kinetischen Energie pro Masseneinheit $K = \mathbf{v}^2/2$ und der mechanischen Energie pro Masseneinheit $E_\mathrm{m} = K + \Phi$.

Nach elementarer Manipulation erhält man daraus den sogenannten *pseudogeostrophischen Wind* [4]

$$\mathbf{v}_\mathrm{ps} = \frac{\mathbf{k}}{(\zeta + f)} \times \nabla_\mathrm{h}\,(K + \Phi) \tag{4}$$

mit den zwei Komponenten in x- und y-Richtung.

Die obigen Beziehungen lassen sich auch in natürlichen Koordinaten (z.B. Holton, 2004, Abschnitt 3.2.1) mit $\mathbf{v} = V\mathbf{t}$ und dem Dreibein $\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{t}$ bzw. $\mathbf{k} = \mathbf{t} \times \mathbf{n}$ formulieren[5]. Aus den beiden Komponenten der pseudogeostrophischen Relation im natürlichen Koordinatensystem folgen die beiden Gleichungen

$$V_\mathrm{ps} = -\frac{\partial\,(K + \Phi)\,/\partial n}{\left(\frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} + f\right)} \tag{5a}$$

$$\frac{\partial\,(K + \Phi)}{\partial s} = 0 \tag{5b}$$

mit der *absoluten Vorticity in natürlichen Koordinaten* und der Aufspaltung in *Krümmungs-* , *Scherungs-* und *Erdvorticity:*

$$\eta = \underbrace{\frac{V}{R_s}}_{\text{Krümmungs-}} \underbrace{-\frac{\partial V}{\partial n}}_{\text{Scherungs-}} + \underbrace{f}_{\text{Erd-V.}}\,. \tag{6}$$

R_s ist der lokale Krümmungsradius der Stromlinien.

2 Interpretation

Die Interpretation stützt sich je nach Zweckmäßigkeit meist auf die Darstellung in natürlichen Koordinaten, gelegentlich auf die klassische (pseudo-)kartesische zweidimensionale Vektornotation. Vereinfachend wird bis auf weiteres von der *Nordhalbkugel* ($f > 0$) ausgegangen. Für die Südhemisphäre kehren sich die Vorzeichen um.

1. $\frac{\partial E_\mathrm{m}}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial s}\,(K + \Phi) = 0$ bedeutet, dass entlang einer Stromlinie die Summe aus kinetischer und potenzieller Energie konstant ist ($K + \Phi = \mathrm{const}$). D.h. bei einer Strömung vom geopotenziellen Hoch zum Tief (potenzielle Energie nimmt ab) wird die Strömung beschleunigt (kinetische Energie nimmt zu), bei einer Strömung vom geopotenziellen Tief zum Hoch wird die Strömung abgebremst. Bei einer Strömung entlang der Isohypsen bleibt die Geschwindigkeit konstant.

2. Der pseudogeostrophische Wind weht normal zum horizontalen Gradienten der mechanischen Energie $E_\mathrm{m} = K + \Phi$.

3. Der Betrag ist
   a) direkt proportional zur Stärke des Gradienten und

[1] $\partial \mathbf{v}_h/\partial t = 0$

[2] $\omega = dp/dt = 0$

[3] allgemein: $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2}\nabla \cdot \mathbf{v}^2 + (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v}$

[4] Definition nach Lange (2002, S. 532). Gelegentlich wird auch verkürzt $\mathbf{v}_{ps} = \frac{\mathbf{k}}{\eta} \times \nabla_h \Phi$ als pseudogeostrophischer Wind bezeichnet.

[5] Die pseudogeostrophische Relation (3) lautet in natürlichen Koordinaten $(\zeta + f)\mathbf{k} \times V\,\mathbf{t} + (\partial E_\mathrm{m}/\partial s)\;\mathbf{t} + (\partial E_\mathrm{m}/\partial n)\;\mathbf{n} = 0$.

b) indirekt proportional zum Betrag der absoluten Vorticity η.

4. Die Richtung des pseudogeostrophischen Windes ist abhängig vom Vorzeichen der absoluten Vorticity und der Richtung des Gradienten. Für die Nordhalbkugel gilt:
   a) Bei positiver absoluter Vorticity (d.h., für alle zyklonalen und die meisten schwach antizyklonalen Wirbel) liegt das „mechanische“ Tief zur Linken der Strömungsrichtung.
   b) Bei negativer absoluter Vorticity (d.h., in sehr starken antizyklonalen Wirbeln) liegt das „mechanische“ Tief zur Rechten der Strömungsrichtung.

3 Spezialfälle

Aus dem pseudogeostrophischen Wind lassen sich je nach Annahmen eine Reihe zweidimensionaler stationärer Windfeldapproximationen als Spezialfall herleiten. Auf Detailrechnungen wird der Übersichtlichkeit halber im laufenden Text verzichtet, allenfalls erforderliche Nebenrechnungen finden sich gesammelt in Abschnitt 6.

3.1 Der Trägheitswind

Vernachlässigt man in Gleichung (5a) den Geopotenzialgradienten ($\nabla_h \Phi = 0$) so folgt nach einfacher Rechnung (siehe Abschnitt 6 auf der nächsten Seite) der Trägheitswind (Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft bzw. Trägheitskraft und Corioliskraft)

$$V_i = -fR_s\,, \tag{7}$$

der die antizyklonale Strömung (auf der Nordhalbkugel im Uhrzeigersinn) nach Auslenkung vom Gleichgewichtszustand beschreibt. In der Atmosphäre ist er selten rein zu beobachten, häufiger jedoch im Ozean, wo die Voraussetzungen dafür leichter erfüllt sind. Die Rossbyzahl, das Verhältnis zwischen Trägheitskraft und Corioliskraft, ergibt für den Trägheitswind $\mathrm{Ro} = \left|\frac{V}{fR}\right| = 1$.

3.2 Der geostrophische Wind

Wenn das Windfeld nahezu krümmungs- ($V/R_s \approx 0$) und scherungsfrei ($-\partial V/\partial n \approx 0$) ist, dann verschwindet die relative Vorticity $\zeta \approx 0$. Die absolute Vorticity degeneriert zu $\eta \approx f$. Bleibt das Geschwindigkeitsfeld zusätzlich noch entlang der Stromlinien nahezu konstant ($\partial V/\partial s \approx 0$), dann verschwindet der Gradient der kinetischen Energie $\nabla_\mathrm{h} K \approx 0$. Somit verkürzt sich der pseudogeostrophische Wind gem. der Gleichungen (4), (5a) und (5b) zum *geostrophischen Wind* (Gleichgewicht zwischen Druckgradientkraft und Corioliskraft):

$$\mathbf{v}_\mathrm{g} = \frac{\mathbf{k}}{f} \times \nabla_\mathrm{h}\Phi \text{ bzw. } V_\mathrm{g} = -\frac{1}{f}\frac{\partial \Phi}{\partial n}. \tag{8}$$

Die Rossbyzahl für das geostrophische Windfeld lautet wegen $R_s \to \infty$ (keine Krümmung): $\mathrm{Ro} = \left|\frac{V}{fR_s}\right| \ll 1 \approx 0$.

3.3 Der zyklostrophische Wind

Vernachlässig man den Einfluss der Erdrotation $f \approx 0$ und den Gradienten der kinetischen Energie längs der Stromlinie $\partial K/\partial s = V\partial V/\partial s \approx 0$, dann erhält man den zyklostrophischen Wind (Herleitung in Abschnitt 6 auf der nächsten Seite):

$$V_\mathrm{c} = \sqrt{-R_s \frac{\partial \Phi}{\partial n}}\,, \tag{9}$$

der beschreibt, dass ein Tief sowohl zyklonal ($R_s > 0$, tiefer Druck zur Linken) als auch antizyklonal ($R_s < 0$, tiefer Druck zur Rechten) umströmt werden kann (Gleichgewicht zwischen Zentrifugalkraft und Druckgradientkraft). Hier gilt für den Rossbyparamter (wegen $f \ll V/R_s$): $\mathrm{Ro} = \left|\frac{V}{fR_s}\right| \gg 1 \approx \infty$.

3.4 Der Gradientwind

Vernachlässigt man allein den Gradienten der kinetischen Energie, behält aber Druckgradient und Coriolisbeschleunigung und erlaubt gekrümmte Stromlinien ($R_s \neq 0$), dann erhält man als Ergebnis den Gradientwind als Gleichgewicht zwischen Druckgradientkraft, Zentrifugalkraft (Trägheitskraft) und Corioliskraft (siehe Abschnitt 6 auf der nächsten Seite).

$$V_\mathrm{gr} = -\frac{fR_s}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R_s^2}{4} - R\frac{\partial \Phi}{\partial n}}\,. \tag{10}$$

Die Gradientwindgleichung hat bekanntlich (z.B. Holton, 2004, S. 66) vier physikalische Lösungen: das zyklonal umströmte *normale Tief* ($V_\mathrm{gr} < V_\mathrm{g}$), das antizyklonal umströmte *normale Hoch* ($V_\mathrm{gr} > V_\mathrm{g}$), das antizyklonal umströmte *anormale Tief* (quasi der antizyklonale zyklostrophische Wind mit relativ wenig Corioliskraft, $|V_\mathrm{gr}| \gg |-V_\mathrm{g}|$) und das antizyklonal umströmte *anormale Hoch* ($V_\mathrm{gr} \gg V_\mathrm{g}$)[6].

4 Der Jetstream als pseudogeostrophische Strömung

Teilaspekte der Dynamik eines Jetstream lassen sich mit dem pseudogeostrophischen Windkonzept verstehen. In Abbildung 1 auf der nächsten Seite ist symbolisch ein Jetstream mit seinem Einzugsgebiet westlich des Kerns und seinem Auszugsgebietes östlich davon zu erkennen.

Das geostrophische Windfeld in der ersten Skizze ist – dem Geopotenzialfeld folgend – symmetrisch um beide Koordinatenachsen. Es stellt die „nullte“ Approximation dar. Ausgehend davon, kann man als erste Approximation für den pseudogeostrophischen Wind

$$\mathbf{v}_\mathrm{ps} \approx \frac{\mathbf{k}}{\zeta_\mathrm{g} + f_0} \times \nabla_\mathrm{h}\left(\Phi + \frac{\mathbf{v}_\mathrm{g}^2}{2}\right)$$

setzen, wobei sowohl die relative Vorticity ($\zeta_\mathrm{g} = \nabla_\mathrm{h}^2\Phi/f_0$) als auch die kinetische Energie quasigeostrophisch approximiert werden. Die mittlere Skizze in Abb. 1 zeigt den pseudogeostrophischen Wind in der oben genannten Form. Man erkennt,

1. dass das Geschwindigkeitsmaximum verstärkt und nach Süden in Richtung zum antizyklonalem Gradientwind hin verlagert wird, und

[6] Obwohl tendenziell instabil (Trägheitsinstabilität, z.B. Zdunkowski and Bott, 2003, S. 500), wird das anormale Hoch gelegentlich beobachtet und für numerische Fehlanalysen verantwortlich gemacht (Krishnamurti et al., 2005; Li, 2015).

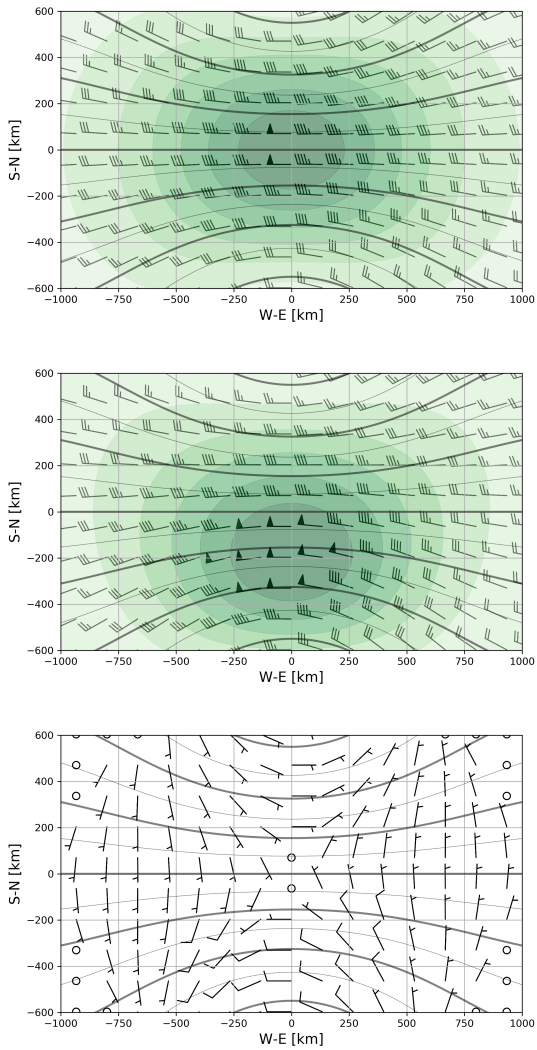

Abbildung 1: Schematische Jetstream-Skizze mit Isohypsen (schwarze Linien) mit tiefem Potenzial im Norden und hohem Potenzial im Süden. *Oben*: geostrophischer Wind mit zugehöriger kinetischer Energie (grünlich). *Mitte*: approximierter pseudogeostrophischer Wind. *Unten*: zugehörige ageostrophische Windkomponente. Der Breiteneffekt des Coriolis-Parameters ist nicht berücksichtigt.

2. dass das Windfeld im Einzugsgebiet des Jets zum tiefen Geopotenzial hin abgelenkt wird und im Auszugsbereich zum hohen Geopotenzial hin. Das bringt zum Ausdruck, dass eine Zunahme der kinetischen Energie mit einer Abnahme der potenziellen Energie verbunden ist und umgekehrt. Das kann nur duch ageostrophische Windkomponenten quer zu den Isohypsen erfolgen. Das ageostrophische Windfeld ist in der untersten Skizze von Abb. 1 dargestellt.

5 Abschließende Bemerkung

Der geostrophische Wind verbindet das Windfeld im starr rotierenden Bezugssystem mit der potenziellen Energie (dem Geopotenzialfeld). Der Wirbelanteil tritt nur über die Erdvorticity f in Erscheinung. Im Gegensatz dazu ist der pseudogeostrophische Wind mit der gesamten mechanischen Energie $K + \Phi$, die sich dynamisch ändert, und dem Rotationsfeld der Strömung (d.h. mit der absoluten Vorticity $\eta = \zeta + f$) verbunden, das sich ebenfalls dynamisch ändert. Es kann daher als ein erstes motivierendes Beispiel für eine umfassendere Energie-Wirbel-Theorie gesehen werden, so wie sie Lange (2002) in seiner Monographie ab Seite 529 in ihren Anfangsgründen darstellt.

6 Nebenrechnungen

Trägheitswind Vernachlässigt man in Gleichung (5a) den Gradienten des Geopotentials, erhält man

$$V = -\frac{1}{2}\frac{\partial V^2/\partial n}{(\zeta + f)} \text{ und } \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial s} = 0\,.$$

Mit $\zeta = V/R_\mathrm{s} - \partial V/\partial n$ folgt

$$\begin{aligned} V &= -\frac{V\partial V/\partial n}{\frac{V}{R_s} - \frac{\partial V}{\partial n} + f} \\ \frac{V^2}{R_S} \cancel{- V\frac{\partial V}{\partial n}} + f\,V &= \cancel{-V\frac{\partial V}{\partial n}} \\ V &= -f\,R_\mathrm{s} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

$\partial V/\partial s$ verschwindet nach Voraussetzung($\partial K/\partial s = 0$).

Geostrophischer Wind Die Herleitungsskizze in Unterabschnitt 3.2 auf der vorherigen Seite ist vollständig.

Zyklostrophischer Wind Aus der pseudogeostrophischen Windgleichung in natürlichen Koordinaten folgt für $f = 0$:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial\left(\Phi + K\right)/\partial n}{\zeta} = -\frac{\partial\Phi/\partial n + V\partial V/\partial n}{V/R_s - \partial V/\partial n} \\ V\left(V/R_s - \frac{\partial V}{\partial n}\right) &= \frac{V^2}{R_\mathrm{s}} \cancel{- V\frac{\partial V}{\partial n}} = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \cancel{- V\frac{\partial V}{\partial n}} \\ V &= \sqrt{-R_\mathrm{s}\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

$\partial V/\partial s$ verschwindet wieder nach Voraussetzung ($\partial K/\partial s = 0$).

Gradientwind Aus der pseudogeostrophischen Windgleichung in natürlichen Koordinaten folgt:

$$\begin{aligned} V &= -\frac{\partial\left(\Phi + K\right)/\partial n}{\zeta + f} = -\frac{\partial\Phi/\partial n + V\partial V/\partial n}{V/R_\mathrm{s} - \partial V/\partial n + f} \\ V\left(V/R_\mathrm{s} - \frac{\partial V}{\partial n} + f\right) &= V^2/R_\mathrm{s} \cancel{- V\frac{\partial V}{\partial n}} + fV = -\frac{\partial\Phi}{\partial n} \cancel{- V\frac{\partial V}{\partial n}} \\ V^2/R_\mathrm{s} + fV + \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0 \\ V &= -\frac{fR_\mathrm{s}}{2} \pm \sqrt{\frac{f^2R_\mathrm{s}^2}{4} - R\frac{\partial\Phi}{\partial n}} \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Man beachte, dass in diesem Modell die relative Vorticity vollständig berücksichtigt wird. Eine Vernachlässigung der Scherungsvorticity ist nicht erforderlich.

Symbole

φ	geographische Breite
Φ	Geopotenzial auf Druckflächen bzw. potenzielle Energie pro Masseneinheit
$\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla_h \times \mathbf{v}_h$	relative Vorticity $\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$ bzw. $\frac{V}{R} - \frac{\partial V}{\partial n}$
$\Omega = 2\pi/\tau$	Kreisfrequenz der Erdrotation mit der Periode τ
$E_\mathrm{m} = K + \Phi$	mechanische Energie pro Masseneinheit
$f = 2\Omega \sin\varphi$	Coriolisparameter
$K = \mathbf{v}^2/2$	kinetische Energie pro Masseneinheit
$\mathbf{k}$	Einheitsvektor in Richtung des lokalen Zenits
$\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{t}$	Einheitsvektor normal zur Strömungsrichtung im natürlichen Koordinatensystem
$\mathbf{t} = \mathbf{n} \times \mathbf{k}$	Einheitsvektor in Strömungsrichtung im natürlichen Koordinatensystem
$Ro = \frac{U}{fL}$	Rossbyzahl, Verhältnis von Trägheitskraft zu Corioliskraft
$R_\mathrm{s} = 1/K_\mathrm{s}$	Krümmungsradius der Stromlinie, Kehrwert der Stromlinienkrümmung
$\mathbf{v}_\mathrm{h} = V\,\mathbf{t}$	Vektor der Horizontalgeschwindigkeit
$V, V_\mathrm{g}, V_\mathrm{ps}$	Betrag des entsprechenden Windvektors

Literatur

James R. Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology (4th edition).* Elsevier - Academic Press, Amsterdam, .., Tokyo, 2004.

T. N. Krishnamurti, P. Cunningham, and K. Rajendran. *Anomalous gradient winds in the subtropical jet stream and interpretations of forecast failures.* Meteorology and Atmospheric Physics, 88:237–250, January 2005.

Hans-Joachim Lange. *Die Physik des Wetters und Klimas. - Ein Grundkurs zur Theorie des Systems Atmosphäre.* Dietrich Reimer Verlag. Berlin., 2002.

N. Li. *A discussion on the existence of the anomalous high and the anomalous low.* Annales geophysicae, 33:1253–1261, October 2015.

Wilford Zdunkowski and Andreas Bott. *Dynamics of the Atmosphere - A Course in Theoretical Meteorology.* Cambridge University Press, Cambridge - New York - Melbourne - Cape Town - Madrid, 2003.