Zur Statik von Inversionen - Teil 1

Modell mit zwei Schichten konstanter Dichte

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 3. Feber 2019

Es wird ein sehr einfaches Zweischichtenmodell betrachtet mit einer Schicht dichterer Flüssigkeit unten und einer Schicht weniger dichter Flüssigkeit oben. Es kann eine Funktion für die Höhe der unteren Schicht (der *Inversionshöhe*) in Abhängigkeit beider Dichtewerte (bzw. der Dichtedifferenz), sowie des Drucks an der unteren und oberen Berandung (bzw. der Druckdifferenz) gefunden werden. Eine Empfindlichkeitsanalyse gibt einen qualitativen Anhalt über die Entwicklung der Inversionshöhe in Abhängigkeit ihrer Zustandsgrößen.

1 Die Inversionshöhe

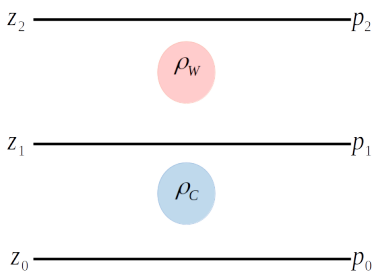

Abbildung 1: Quasistatisches Modell-Fluidum bestehend aus zwei Schichten konstanter Dichte.

Gegeben sei ein idealisiertes quasistatisches Modellfluidum gemäß Abbildung 1. Es bestehe in der unteren Schicht aus einer Flüssigkeit mit der höheren konstanten Dichte ρ_c und in der oberen Schicht aus einer Flüssigkeit mit der geringeren konstanten Dichte ρ_w. Das heißt, die Bedingung für eine stabile Schichtung ist erfüllt:

$$\rho_c > \rho_w \,. \tag{1}$$

Begrenzt sei es durch einen festen Rand bei $z_0 = 0$ unten und einem nicht notwendigerweise festen Rand in der Referenzhöhe z_2. Die Höhe der Grenze dazwischen (die „*Inversionshöhe*“) sei z_1.

Ausgehend von der hydrostatischen Grundgleichung (z.B. Holton, 1992, S. 19) ergibt sich der vertikale Druckverlauf in einem inkompressiblen Fluidum konstanter Dichte nach vertikaler Integration zu

$$p(z) = p_0 - g\rho z \,.$$

Damit lässt sich sehr einfach der Druck im obigen Modell berechnen:

$$p_2 = p_0 - g\left[\rho_c z_1 + \rho_w (z_2 - z_1)\right] \,,$$

wobei p_2 der Druck in der Höhe z_2 und p_0 der Druck in $z_0 = 0$ ist. Mittels elementarer Umformung

$$p_0 - p_2 = g\left(\rho_c z_1 - \rho_w z_1 + \rho_w z_2\right)$$

erhält man die gewünschte Inversionshöhe

$$z_1 = \frac{1}{g}\frac{(p_0 - p_2)}{(\rho_c - \rho_w)} - \frac{\rho_w}{(\rho_c - \rho_w)} z_2$$

bzw.

$$\boxed{z_1 = \frac{1}{g}\frac{\Delta p}{\Delta\rho} - \frac{\rho_w}{\Delta\rho} z_2} \tag{2}$$

mit

$$\Delta\rho = \rho_c - \rho_w \,, \tag{3}$$

$$(\rho_c = \rho_w + \Delta\rho) \,, \tag{4}$$

$$\Delta p = p_0 - p_2 \,. \tag{5}$$

z_1 ist nun aus Gründen der Übersicht und der vereinfachten weiteren Behandlung als eine Funktion der Druckdifferenz zwischen dem Boden und der oberen Berandung Δp, der Fluidumsdichte in der oberen Schicht ρ_w und der Differenz zwischen Dichte unten und oben $\Delta\rho$ dargestellt. Die Zustandsgrößen der Inversionshöhe sind in diesem Fall Δp, ρ_w und $\Delta\rho$. Die Höhe der oberen Begrenzung z_2 wird als gegeben betrachtet, sie ist keine unabhängige Zustandsgröße.

2 Zusatzbedingungen

Aus der Bedingung, dass die *Inversionshöhe positiv* sein muss ($z_1 > 0$), folgt (siehe Unterabschnitt 5.1, Punkt 1):

$$z_2 < \frac{\Delta p}{g\rho_w} \text{ bzw. } \Delta p > g\rho_w z_2 \,.$$

Aus der Bedingung, dass die *Inversionshöhe kleiner als das Referenzniveau* z_2 sein soll ($z_1 < z_2$), folgt (siehe Unterabschnitt 5.1, Punkt 2):

$$z_2 > \frac{\Delta p}{g\rho_c} \text{ bzw. } \Delta p < g\rho_c z_2 .$$

.

Zusammengefasst ergeben sich als Bedingungen für z_2 bzw. Δp:

$$\frac{\Delta p}{g\rho_c} < z_2 < \frac{\Delta p}{g\rho_w} \tag{6}$$

$$g\rho_w z_2 < \Delta p < g\rho_c z_2 \,. \tag{7}$$

Anschaulich interpretiert bedeutet die Gleichung 6: Im Zweischichtenmodell muss die obere Referenzhöhe z_2 zwischen jenem Wert $z_{2,c}$ liegen, der sich ergibt, wenn das Fluidum nur aus der dichteren Flüssigkeit ρ_c besteht und jenem Wert $z_{2,w}$, der sich ergibt, wenn die Flüssigkeit nur aus der weniger Dichten Flüssigkeit ρ_w besteht.[1]

3 Empfindlichkeitsanalyse

In unserem Fall lautet das totale Differenzial zur Abschätzung der Empfindlichkeit:

$$dz_1 = \frac{\partial z_1}{\partial \Delta p} d\Delta p + \frac{\partial z_1}{\partial \rho_w} d\rho_w + \frac{\partial z_1}{\partial \Delta \rho} d\Delta \rho \,. \tag{8}$$

Die einzelnen partiellen Ableitungen dazu lassen sich nach einfacher Rechnung (für Gleichung 11 siehe Unterabschnitt 5.2) anschreiben als:

$$\frac{\partial z_1}{\partial (\Delta p)} = \frac{1}{g\,\Delta\rho} \tag{9}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \rho_w} = -\frac{z_2}{\Delta\rho} \tag{10}$$

$$\frac{\partial z_1}{\partial \Delta \rho} = -\frac{(\overline{\rho} - \rho_w)}{(\Delta\rho)^2} z_2 \,. \tag{11}$$

Dabei sind die Beziehungen 3 bis 5 zu beachten. In der letzten partiellen Ableitung 11 lautet die vertikal gemittelte Dichte $\overline{\rho}$ vom Boden bis zur Referenzhöhe z_2 :

$$\overline{\rho} = \Delta p/(g z_2).$$

$\overline{\rho}$ ist jene homogene mittlere Dichte, die das Fluidum annehmen müsste, damit der Druck ausgehend vom Bodenwert p_0 bis zum Wert p_2 in der Höhe z_2 sinkt. Dieser rechnerische Wert hängt implizit von den beiden Dichtewerten ρ_c und ρ_w und der Inversionshöhe z_1 ab, obwohl diese Abhängigkeit in der oberen Beziehung nicht explizit in Erscheinung tritt.

3.1 Interpretation

1. Der Ausdruck 9 ist unter den gemachten Annahmen positiv definit (ein negatives $\Delta\rho$ wäre statisch instabil). Das heißt, *eine Zunahme der Druckdifferenz zwischen dem unteren und oberen Niveau bzw. ein Druckanstieg unten und ein Druckfall oben bedeuten ein Steigen der Inversionshöhe. Ein Druckfall unten und ein Druckanstieg oben bedeuten ein Sinken der Inversionshöhe.*

2. Der Ausdruck 10 ist unter den gemachten Annahmen negativ definit. *Eine Zunahme der Dichte in der oberen Schicht bedeutet ein Sinken der Inversion. Eine Abnahme der Dichte der oberen Schicht bedeutet eine Zunahme der Inversionshöhe.*

3. Der Ausdruck 11 ist ebenfalls negativ definit, denn für die vertikal gemittelte Dichte gilt $\rho_c \geq \overline{\rho} \geq \rho_w$ und daher $(\overline{\rho} - \rho_w) \geq 0$. *Deshalb bedeutet eine Zunahme der Dichtedifferenz zwischen unten und oben eine Abnahme der Inversionshöhe, eine Abnahme der Dichtedifferenz eine Zunahme der Inversionshöhe* (mit geringerer Empfindlichkeit als jener von Gleichung 10).

Tabelle 1 zeigt eine Aufstellung mit typischen Werten zum gegenständlichen Inversionsmodell.

[1] $z_{2,c} = \Delta p/(g\rho_c)$ und $z_{2,w} = \Delta p/(g\rho_w)$

z_0	0	m
z_2	3000	m
p_0	1010	hpa
Δp	310	hPa
ρ_w	0,95	kg/m^3
$\Delta\rho$	0,25	kg/m^3
$\overline{\rho}$	1,054	kg/m^3
z_1	**1245**	m
$\partial z_1/\partial \Delta p$	+40,8	m/hPa
$\partial z_1/\partial \rho_w$	-120,0	m/(dag/m^3)
$\partial z_1/\partial \Delta \rho$	-49,8	m/(dag/m^3)

Tabelle 1: Typische Werte

4 Ausblick

Diese stark vereinfachte Betrachtung zur Statik der Inversionshöhe mit den beiden Schichten konstanter Dichte ist nur sehr bedingt auf die Atmosphäre, einem kompressiblen Gas, anwendbar. Zunehmend realistischere Approximationen wären:

1. Zwei isotherme Schichten eines idealen Gases mit Kaltluft T_c unten und Warmluft T_w oben.

2. Zwei isentrope Schichten eines idealen Gases mit potenzieller Kaltluft Θ_c unten und potenzieller Warmluft Θ_w oben, vergleiche Thaler (2009-2010).

Eine Erweiterung auf beliebige vertikale Temperaturprofile ergibt sich, wenn man statt der unteren Kaltluft bzw. der oberen Warmluft jeweils die barometrischen Mitteltemperaturen

$$\frac{1}{\overline{T}} = \frac{1}{\Delta z} \int_{\Delta z} \frac{dz}{T(z)}$$

betrachtet. Allerdings sind die barometrischen Mitteltemperaturen dann implizite Funktionen der Inversionshöhe. Die dabei auftretenden mathematischen Komplikationen müssen noch bewältigt werden.

5 Detailrechnungen

5.1 Beschränkungen für die freien Modellparameter

1. Nur **positive Inversionshöhen** ($z_1 > 0$) sind physikalisch sinnvoll. D.h. nach Gl. 2:

$$\frac{1}{g}\frac{\Delta p}{\Delta\rho} - \frac{\rho_w}{\Delta\rho} z_2 > 0$$

$$\Delta p > g\rho_w z_2 \text{ bzw.}$$

$$z_2 < \frac{\Delta p}{g\rho_w} \,.$$

2. Nur **Inversionshöhen niedriger als das obere Referenzniveau** ($z_1 < z_2$) sind physikalisch sinnvoll. D.h.

nach Gl. 2:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{g}\frac{\Delta p}{\Delta\rho} - \frac{\rho_w}{\Delta\rho} z_2 &< z_2 \\
\frac{1}{g}\frac{\Delta p}{\Delta\rho} &< \left(1 + \frac{\rho_w}{\Delta\rho}\right) z_2 \\
\Delta p &< g\Delta\rho \left(1 + \frac{\rho_w}{\Delta\rho}\right) z_2 \\
\Delta p &< g \underbrace{(\rho_w + \Delta\rho)}_{\rho_c} z_2 \\
\Delta p &< g\rho_c z_2 \text{ bzw.} \\
z_2 &> \frac{\Delta p}{g\rho_c}
\end{aligned}
$$

5.2 Lokale Ableitungen zur Inversionshöhe z_1

Während die partiellen Ableitungen 9 und 10 unmittelbar einsichtig sind, benötigt die partielle Ableitung nach der Dichtedifferenz $\Delta\rho$ noch eine Erläuterung:

$$
\frac{\partial z_1}{\partial \Delta\rho} = -\frac{1}{g}\frac{\Delta p}{(\Delta\rho)^2} + \frac{\rho_w z_2}{(\Delta\rho)^2} \,. \tag{12}
$$

Aus $\Delta p = p_0 - p_2 = g\overline{\rho}(z_2 - z_0) = g\overline{\rho} z_2$ folgt für die mittlere Dichte $\overline{\rho}$:

$$
\begin{aligned}
\overline{\rho} &= \frac{\Delta p}{g z_2} \text{ bzw.} \\
\frac{\Delta p}{g} &= \overline{\rho} z_2 \,.
\end{aligned}
$$

Setzt man diese Beziehung nun in den ersten Term auf der rechten Seite der partiellen Ableitung (12) ein, so erhält man

$$
\frac{\partial z_1}{\partial \Delta\rho} = \frac{1}{(\Delta\rho)^2}\left(-\overline{\rho} z_2 + \rho_w z_2\right)
$$

und damit unmittelbar den Ausdruck 11.

Symbole

g	Schwerebeschleunigung
$\rho_c, \rho_w, \overline{\rho}, \Delta\rho$	Dichte in den verschiedenen Varianten
$p_0, p_2, \Delta p$	Druck in den verschiedenen Varianten
$z_0,\ z_1,\ z_2$	Höhe des Bodens, der Inversion und der oberen Berandung

Literatur

James R. Holton. *An Introduction to Dynamic Meteorology (3rd ed.).* Academic Press, San Diego, New York, Boston, London, Sydney, Tokyo, Toronto, 1992.

Dietmar Thaler. *About the Hydrostatics of Inversions*, 2009-2010. https://www.foehnwall.at/inversion.html.