

Die Kontinuitätsgleichung

Müssen nichtkonvektive Massenflüsse berücksichtigt werden?

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 14. Juli 2022

Die herkömmliche Form der Massen-Kontinuitätsgleichung für ein homogenes Fluidum, die differentielle Form des Massenerhaltungssatzes, enthält als einzigen Flussterm den konvektiven Massenfluss $\rho \mathbf{v}$, das Produkt aus Dichte des Fluidums und der Strömungsgeschwindigkeit. Von manchen Autoren wird in der Massen-Kontinuitätsgleichung ein zusätzlicher diffusiver bzw. nichtkonvektiver Massenflussterm postuliert. – Ist das sinnvoll und richtig?

1 Problem

In der Monographie von Zeitlin (2018) wird in einem einführenden Kapitel als (Massen-)Kontinuitätsgleichung für ein homogenes Misch-Fluidum die Beziehung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} + \mathbf{j}) \quad (1)$$

angeführt. Konkret wird für den nichtkonvektive Fluss ein Diffusionsterm gemäß dem Fickschen Diffusionsgesetz gewählt: $\mathbf{j} = -D \nabla \rho$ (D sei der Diffusionskoeffizient). Das heißt, die Dichte eines raumfesten Luftpaketes nimmt durch die Konvergenz des konvektiven Massenflusses $\rho \mathbf{v}$ und eines nichtkonvektiven, im Spezialfall auch diffusiven, Massenflusses¹ $\mathbf{j}$ zu. Zeitlin erläutert diesen Ansatz nicht weiter, sondern setzt ihn als bekannt voraus. Die übliche Formulierung der Massen-Kontinuitätsgleichung gemäß fast aller Lehrbücher der geophysikalischen Fluidodynamik, *pars pro toto* Vallis (2017), beschränkt sich einzig auf einen konvektiven Massenfluss und lautet

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) . \quad (2)$$

Wie kann man diesen Widerspruch verstehen?

2 Zur Definition der Geschwindigkeit eines Fluidums

Das individuelle Fluidumpaket in einem mitströmenden Volumen besteht aus Molekülen, die alle eine bestimmte Masse m_k und Geschwindigkeit $\mathbf{v}_k$ haben. Die nach außen wahrnehmbare Geschwindigkeit des Paketes wird über die Verlagerungsgeschwindigkeit seines Schwerpunktes relativ zu einem Bezugssystem als baryzentrischer Mittelwert definiert:

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_k m_k \mathbf{v}_k}{\sum_k m_k} = \frac{1}{M} \sum_k m_k \mathbf{v}_k . \quad (3)$$

¹Korrektur: Massenflussdichte

Alternativ formuliert bedeutet das, dass der Impuls des Fluidumpaketes die Summe der Impulse aller Moleküle² ist:

$$M \mathbf{v} = \sum_k m_k \mathbf{v}_k . \quad (4)$$

Dividiert man durch das jeweilige Volumen V des Paketes, erhält man

$$\rho \mathbf{v} = \sum_k \rho_k \mathbf{v}_k \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{v} = \frac{1}{\rho} \sum_k \rho_k \mathbf{v}_k \quad (5)$$

ρ_k ist die Dichte eines einzelnen Moleküls. Aus dieser Definition folgt unmittelbar, dass kein Molekül das individuelle Luftpaket verlassen kann, es daher außer dem konvektiven Massenfluss $\rho \mathbf{v}$ bzw. $M \mathbf{v}$ keinen alternativen Transport gibt und somit die Kontinuitätsgleichung für das homogene Fluidum, Gl. (2), universell gültig ist. *Subskalige Massenflüsse sind gemäß der Definition der baryzentrischen Strömungsgeschwindigkeit ausgeschlossen!*

Jede Kritik an der klassischen Form der Kontinuitätsgleichung muss an der obigen Definition der baryzentrischen Strömungsgeschwindigkeit ansetzen.

3 Der Diffusionsterm

Belevich (2009)³ zeigt, dass ein einfach zu beschreibendes Problem der Hydro-Thermodynamik, in dem ein stabil geschichtetes Fluidum zwischen einem kalten Boden und einem warmen oberen Rand liegt, mit der klassischen Kontinuitätsgleichung zu einem überbestimmten, selbstwidersprüchlichen und deshalb unlösbaren Gleichungssystem degeneriert, welches nicht die empirisch evidenten Lösungen erbringen kann.

Die Ursache sieht Belevich in der Besonderheit der baryzentrischen Geschwindigkeitsdefinition, wenn man sie als makroskopische Geschwindigkeit im Sinne der klassischen Kontinuumsmechanik interpretiert. In die Gleichung (3) geht auch das „Zittern“ der Moleküle durch die Brownsche Molekularbewegung ein, deren gemittelte kinetische Energie die innere Energie (bzw. Temperatur) konstituiert. In der Kontinuumsmechanik geht man davon aus, dass das gedankliche Fluidumpaket, das aus einer hinreichend großen Anzahl von Molekülen besteht, wohl definiert bleibt. Benachbarte Luftpakete können sich aber mit der Zeit aufgrund der zufälligen Molekularbewegung wechselseitig durchdringen, verletzen also die

²Mit der Wahl des baryzentrischen Geschwindigkeitsmittels ist das zweite Newtonsche Gesetz $M d\mathbf{v}/dt = \sum \mathbf{F}_i$ in dieser einfachen Form auch für Fluidumpartikel gültig.

³Bemerkenswert: Sowohl Zeitlin als auch Belevich entstammen der sowjetischen Tradition der Fluidodynamik.

Grundannahme der Integrität (Abb. 1). Ein Teil der Moleküle von Paket A befindet sich nach einer Weile im Volumen des Paketes B und umgekehrt.

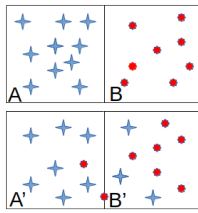


Abbildung 1: Skizze zur Diffusion zwischen ruhenden Luftpaketen von anfänglich A und B nach einer gewissen Zeit zu A' und B'.

Belevichs Lösungsansatz besteht in einer kritischen Neuableitung der Kontinuitätsgleichung *ab ovo* mit einer alternativ definierten Geschwindigkeit des Fluidums, die die Individualität der Partikel des Kontinuums beibehält und aus Sicht der Kontinuumsmechanik subskalige Abweichungen der Geschwindigkeit gesondert berücksichtigt: $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$. Ebenso wird eine mittlere Luftdichte $\bar{\rho} = \rho - \rho'$ eingeführt, die jene Luftdichte ist, die mit der skaligen Geschwindigkeit $\hat{\mathbf{v}}$ transportiert wird. Eingesetzt in die klassische Kontinuitätsgleichung und nach diversen Mittelungsprozeduren erhält man als alternative Formulierung der Kontinuitätsgleichung:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{\rho} \hat{\mathbf{v}}) - \bar{\rho}' \mathbf{v}' . \quad (6)$$

Belevich nennt sie die Massendichte-Diffusionsgleichung, *mass density diffusion equation*. Der erste Term ist die gewohnte Konvergenz des skaligen Massenflusses, während der zweite Term die Konvergenz des subskaligen Massenflusses (die Selbst-Diffusion, *self diffusion*) beschreibt. Gemeinsam mit dem Fickschen Diffusionsgesetz $\mathbf{j} = \bar{\rho}' \mathbf{v}' = -D \nabla \rho$ ergibt sich daraus die eingangs postulierte Gleichung (1). Es versteht sich, dass Belevich sein vorher unlösbares Problem mittels der Massendichte-Diffusionsgleichung lösen kann.

4 Nichtkonvektive Massenflüsse in der feuchten Atmosphäre

Alternative Argumente für nichtkonvektive Massenflüsse in der Kontinuitätsgleichung werden von Wacker und Herbert (2003) geliefert. Die Essenz der Argumente der beiden AutorInnen lautet wie folgt:

Für die Gesamtdichte eines nass-feuchten Luftpaketes gilt:

$$\rho = \rho_d + \rho_w , \quad (7)$$

wobei ρ_d die Dichte trockener Luft und ρ_w die Dichte aller wässrigen Anteile der Luft ist (also Wasserdampf, Flüssigwasser und Eis)⁴. Die baryzentrische Geschwindigkeit eines Luftpaketes lautet dann analog zu Gleichung (5)

$$\mathbf{v} = \frac{1}{\rho} (\rho_d \mathbf{v}_d + \rho_w \mathbf{v}_w) . \quad (8)$$

Mit den Definitionen (7) und (8) ist die klassische Kontinuitätsgleichung (2) weiterhin gültig. Allerdings bekommt man Probleme mit der *kinematischen Randbedingung*, nach der die Geschwindigkeit normal zur festen Berandung verschwinden muss. Bei einem ebenen Boden lautet dann die Vertikalgeschwindigkeit $w_{(z=0)} = w_0 = 0$.

In der Atmosphäre treten jedoch feuchte Massenflüsse durch die untere Berandung auf (Niederschlag, Sublimation, Verdunstung, ..). Gemäß der baryzentrischen Geschwindigkeitsdefinition und der daraus folgenden Gültigkeit der klassischen Kontinuitätsgleichung wird impliziert, dass der Boden durchströmt werden muss ($w_0 \neq 0$). Wacker und Herbert zeigen, dass bei einem Niederschlag von 10 mm/h die resultierende Vertikalgeschwindigkeit durch Schwerpunktsenkung der feuchten Luftsäule in der Größenordnung von einigen Millimetern pro Sekunde liegt und daher *a priori* im Vergleich zu synoptischen Vertikalgeschwindigkeiten nicht vernachlässigbar ist.

Ein möglicher Ausweg, der die Beibehaltung der kinematischen Randbedingungen erlaubt, ist die Beschränkung auf die baryzentrische Geschwindigkeit nur für die trockenen Luftbestandteile, also $\mathbf{v} = \mathbf{v}_d$. Dabei nimmt man jedoch in Kauf, dass die klassische Kontinuitätsgleichung durch nichtkonvektive Massenflüsse der feuchten Bestandteile ergänzt werden muss, und man bei einer Kontinuitätsgleichung der Form (1) mit dem nichtkonvektiven Flussanteil $\mathbf{j} = \rho_w (\mathbf{v}_d - \mathbf{v}_w)$ landet. Für eine ausführliche Diskussion sei auf den Originalartikel verweisen.

5 Resümee

Zusammengefasst lässt sich sagen: Die klassische Form der Kontinuitätsgleichung (2) ist den zu lösenden Problemen nicht immer angemessen. Die verallgemeinerte Form der Kontinuitätsgleichung, die *Massendichte-Diffusionsgleichung*,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot (\rho \mathbf{v} + \mathbf{j})$$

ist für die Lösung gewisser Probleme erforderlich. Plausibel ist das auch deshalb, weil in den anderen hydrothermodynamischen Gleichungen für Impuls und Energie ebenfalls Diffusion in Form von molekularer Reibung und Wärmeleitung in Erscheinung tritt.

Literatur

- Belevich, Michael (Aug. 2009). "On the continuity equation". In: *Journal of Physics A Mathematical and Theoretical* 42. ISSN: 1751-8113.
- Vallis, Geoffrey K. (2017). *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics, 2. Edition*. - Cambridge, .., Delhi: Cambridge University Press. ISBN: 110706550X.
- Wacker, Ulrike und Fritz Herbert (2003). "Continuity equations as expressions for local balances of masses in cloudy air". In: *Tellus A: Dynamic Meteorology and Oceanography* 55A, S. 247–254. ISSN: 02806495.
- Zeitlin, Vladimir (2018). *Geophysical Fluid Dynamics: Understanding (almost) everything with rotating shallow water models*. Oxford: Oxford University Press. ISBN: 978-0198804338.

⁴Wacker und Herbert (2003) betrachten die Massenbilanzen für alle Wasserphasen getrennt, was für die Argumentation hier nicht erforderlich ist.