

Der Rankine-Wirbel

Ein zweidimensionaler Modellwirbel

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 30. August 2021, ergänzt am 12. Sept. 2021

William John Macquorn Rankine (1820-1872) war ein schottischer Physiker und Ingenieur, der maßgebliche Beiträge zur Mechanik sowie Thermo- und Hydrodynamik leistete. Auf ihn geht ein analytisches Modell eines zweidimensionalen Wirbels zurück, welches hier kurz vorgestellt wird.

1 Definition

Der Rankine-Wirbel ist gemäß z.B. Markowski and Richardson (2010, S. 288) in Zylinderkoordinaten ausgehend vom Koordinatenursprung folgendermaßen als zweidimensionale bzw. horizontale Strömung definiert:

$$r \leq R_m : \quad V_\lambda = \frac{V_m}{R_m} r = \Omega_m r \quad (1)$$

$$V_r \equiv 0$$

$$r > R_m : \quad V_\lambda = \frac{V_m R_m}{r} = \frac{\Omega_m R_m^2}{r} \quad (2)$$

$$V_r \equiv 0$$

Das heißt, innerhalb einer Kreisfläche vom Radius R_m erfolgt eine starre Rotation mit der Kreisfrequenz $\Omega_m = V_m/R_m$. Außerhalb des Kreises mit dem Radius R_m nimmt die Tangentialgeschwindigkeit indirekt proportional zum Abstand vom Mittelpunkt ab. Der Betrag der Geschwindigkeit ist im Abstand R_m mit $|V_m|$ maximal. Per Konvention bedeutet $V_\lambda > 0$ eine zyklonale Zirkulation, $V_\lambda < 0$ eine antizyklonale. Entsprechend ändert sich auch das Vorzeichen von Ω_m . Der Abstand vom Koordinatenmittelpunkt r ist immer positiv (vergl. Abbildung 1). Die Radialkomponente der Geschwindigkeit verschwindet ($V_r \equiv 0$).

1.1 Vorticity und Divergenz

Die vertikale Vorticity lautet in Zylinderkoordinaten gem. einer beliebigen Formelsammlung zur Vektoranalysis (z.B. Thaler, 2018-2020b):

$$\zeta = \mathbf{k} \cdot \nabla_h \times \mathbf{v}_h = \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_\lambda)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \lambda} \quad (3)$$

$$r \leq R_m : \quad \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\Omega_m r^2) = 2\Omega_m = 2 \frac{V_m}{R_m} = \text{const} \quad (4)$$

$$r > R_m : \quad \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_m R_m}{r} r \right) = 0 \quad (5)$$

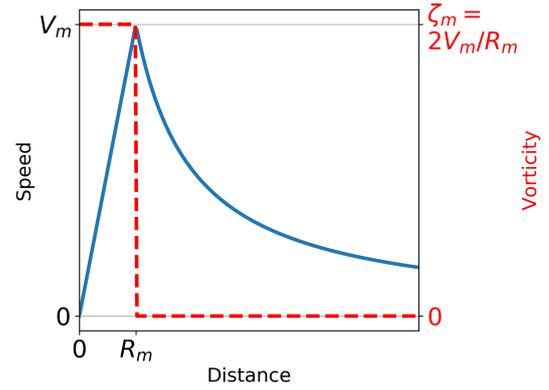


Abbildung 1: Kombiniertes Geschwindigkeits-Abstands- (blau liniert, linke Ordinate) und Vorticity-Abstands-Diagramm (rot strichliert, rechte Ordinate) des Rankine-Wirbels: lineare Zunahme mit r bis zum Radius R_m , darüber hyperbolische Abnahme gemäß $1/r$ sowie konstante Vorticity bis zum Abstand R_m , außerhalb von R_m vorticityfrei.

Der Rankine-Wirbel ist im inneren Bereich von konstanter Vorticity, im äußeren Bereich von verschwindender Vorticity.¹

In Zylinderkoordinaten lautet die horizontale Divergenz der Strömung

$$D = \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h = \frac{1}{r} \frac{\partial (rV_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial (V_\lambda)}{\partial \lambda} = 0. \quad (6)$$

Sie verschwindet allgemein, weil die Radialgeschwindigkeit verschwindet ($V_r \equiv 0$) und weil die Tangentialgeschwindigkeit V_λ unabhängig von λ ist. Der Rankine-Wirbel ist horizontal divergenzfrei. In Hinkunft sei statt V_λ vereinfacht V geschrieben.

1.2 Stromfunktion

Der Rankine-Wirbel (zweidimensional, divergenzfrei) lässt sich vollständig durch eine Stromfunktion beschreiben. Nachdem nach Voraussetzung keine Radialgeschwindigkeit gegeben ist, lautet die Definitionsbeziehung für die Stromfunktion in Zylinderkoordinaten:

$$V = \frac{\partial \Psi}{\partial r}. \quad (7)$$

¹Diese Art von Wirbel nennt man Potentialwirbel oder freie Wirbel. In ihnen hebt Scherungsvorticity von umgekehrtem Vorzeichen die Krümmungsvorticity auf.

Das Ergebnis lautet nach Integration der obigen Beziehung für den Innen- und Außenbereich des Wirbels gesondert (Ψ_0 ist der Wert der Stromfunktion im Zentrum des Wirbels, Nebenrechnungen in Unterabschnitt 4.1 auf der nächsten Seite):

$$\Psi(r \leq R_m) = \Psi_0 + \frac{1}{2} \frac{V_m}{R_m} r^2 \quad (8)$$

$$\Psi(r > R_m) = \Psi_0 + V_m R_m \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) \right] \quad (9)$$

Abbildung 2 zeigt schematisch das Windfeld eines zyklonalen Rankine-Wirbels und dazugehörig die Stromfunktion mit dem tiefstem Wert im Zentrum (dunkel, violett) und der Abnahme der Stromfunktion nach außen (hell, gelb). Die Isowerte der Stromfunktion sind die Stromlinien. Sie zeigen die stärkste Drängung um das Windmaximum herum im Abstand von einer Gitterbox vom Zentrum. Die Abstände der Gitterlinien entsprechen dem Wert von R_m .

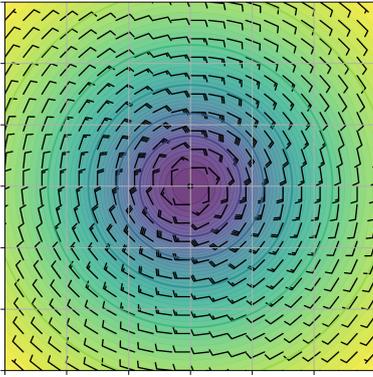


Abbildung 2: Windfeld (Windpfeile) und Stromfunktion (Farbverlauf von dunkelviolett als tiefster Wert zu hellgelb) eines zyklonalen Rankine-Wirbels (schematisch)

2 Geopotentialfelder

Bislang waren alle Betrachtungen kinematischer Natur. Es wurde keine Verbindung zur Dynamik hergestellt. Hier soll nun versucht werden, mögliche dynamische Realisierungen des Rankine-Wirbels durch passende Geopotentialfelder² darzustellen.

2.1 Geostrophisches Windfeld

Am einfachsten gelingt die Verbindung zwischen Geschwindigkeits- und Geopotentialfeld über den *geostrophischen Wind*, der Gleichgewichtsströmung zwischen *Gradientkraft* und *Corioliskraft*. In Zylinderkoordinaten lautet die Approximation (bei nach Voraussetzung verschwindender Radialkomponente der Geschwindigkeit und mit konstantem Coriolisparameter f_0):

$$V_g = \frac{1}{f_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (10)$$

Der Vergleich mit der Definitionsbeziehung Gl. (7) für das Stromfeld zeigt sofort:

$$\Phi = f_0 \Psi \quad (11)$$

Damit folgt aus (8) und (9) für das Geopotential ohne weitere Rechnung:

$$\Phi(r \leq R_m) = \Phi_0 + \frac{1}{2} f_0 \frac{V_m}{R_m} r^2 \quad (12)$$

$$\Phi(r > R_m) = \Phi_0 + f_0 V_m R_m \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) \right] \quad (13)$$

Φ_0 ist der Geopotentialwert im Zentrum des Wirbels.

2.2 Zyklotropisches Windfeld

Der *zyklotropische Wind* ist im zylindrischen Koordinatensystem definiert als Gleichgewicht zwischen *Gradientkraft* und *Zentrifugalkraft*:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = \frac{V_c^2}{r} \quad (14)$$

Diese Beziehung lässt sich für die beiden Geschwindigkeitsansätze Gl. (1) und (2) des Rankine-Wirbels mittels passender Randbedingungen integrieren (siehe Unterabschnitt 4.2.1):

Für den inneren Bereich des Rankine-Wirbels $r \leq R_m$ mit $V = (V_M/R_M) r$ erhält man

$$r \leq R_m : \Phi(r) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_m^2} r^2 \quad (15)$$

Für den äußeren Bereich $r > R_m$ mit $V = V_m R_m / r$:

$$r > R_m : \Phi(r) = \Phi_0 + V_m^2 - \frac{1}{2} V_m^2 \frac{R_m^2}{r^2} \quad (16)$$

wobei berücksichtigt wurde, dass der Randwert bei $r = R_m$ durch das Geopotential $\Phi(R_m)$ für den inneren Bereich definiert ist. Φ_0 ist wieder der Geopotentialwert im Zentrum des Wirbels.

2.3 Gradientwindfeld

Um Komplikationen mit den wechselnden Vorzeichen zu vermeiden, erfolgt *pars pro toto* die Beschränkung auf das regulär zyklonal umströmte Tief auf der Nordhalbkugel [Fall (a) auf Seite 76 in Holton and Hakim (2013)]. Der Gradientwind ist in zylindrischen Koordinaten definiert über

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f_0 V_{gr} + \frac{V_{gr}^2}{r} \quad (17)$$

Die Geopotentialverteilung lautet (Herleitung in Unterabschnitt 4.2.2 auf Seite 4):

$$r \leq R_m : \Phi(r) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \left(f_0 + \frac{V_m}{R_m} \right) \frac{V_m}{R_m} r^2 \quad (18)$$

$$r > R_m : \Phi(r) = \Phi_0 + V_m^2 + \frac{1}{2} f_0 V_m R_m + f_0 V_m R_m \ln \frac{r}{R_m} - \frac{1}{2} V_m^2 \frac{R_m^2}{r^2} \quad (19)$$

²Die Betrachtungen werden im p -System durchgeführt, um Komplikation mit der horizontal variablen Luftdichte zu vermeiden. Um im z -System zu verbleiben, könnte man von der *Boussinesq-Approximation* oder der *anelastischen Approximation* der horizontalen Bewegungsgleichung ausgehen.

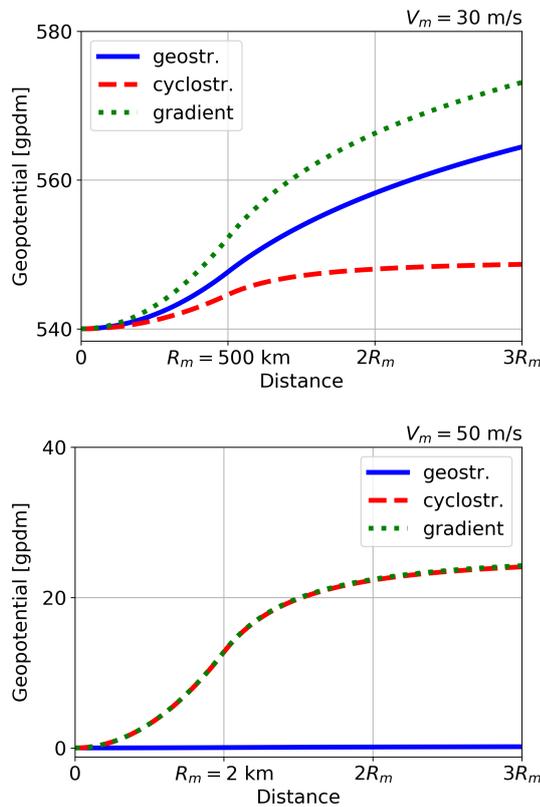


Abbildung 3: Geopotential als Funktion des Abstandes vom zyklonal umströmten Wirbelzentrum für eine geostrophische (blau liniert), zyklostrophische (rot strichliert) und Gradientwind-Verteilung (grün punktiert). Oben für den synoptischen Scale, unten für den Übergangsbereich vom Micro-Scale zum Meso-Scale.

Die Abbildung 3 (oben) zeigt für die geostrophische, zyklostrophische und Gradientwind-Approximation den Geopotentialanstieg mit zunehmendem Abstand für typische Werte des synoptischen Scales. Das Kerngeopotential wurde mit 540 gpd·m angenommen. Hier leistet die Corioliskraft einen dominierenden Beitrag. Abbildung 3 (unten) zeigt die Geopotentialverläufe für den Übergang vom Micro-Scale zum Meso-Scale. Das Kerngeopotential wurde willkürlich auf null gesetzt. In diesem Scale verschwindet der relative Beitrag der Corioliskraft nahezu vollständig, d.h. der zyklostrophische Wind und der Gradientwind sind (fast) identisch.

Ohne weitere Ausführung ist zu ergänzen, dass das Geopotentialfeld für den *pseudogestrophischen Wind* (vergleiche Thaler, 2018-2020a) $\mathbf{v}_h = (f + \zeta)^{-1} \mathbf{k} \times \nabla_h (\Phi + \mathbf{v}_h^2/2)$ ein zum Gradientwind identisches Ergebnis liefert. Der Grund dafür liegt in der strikten Radialsymmetrie des Rankine-Wirbels.

3 Anwendungen

Rankine-Wirbel finden als analytisches Wirbelmodell in strömungstheoretischen Untersuchungen vielfältige Anwendung.

Die bekannteste angenäherte Realisierung eines Rankine-Wirbels ist wohl der Badewannenwirbel. Seine horizontale Strömung befindet sich in guter Näherung im zyklostrophischen Kräftegleichgewicht. Außerhalb des Abflussbereiches ist der Badewannenwirbel ein Vorticity-freier

Potentialwirbel gemäß Gl. (16). Im Ausflussbereich sind die Verhältnisse komplexer, weil die horizontale Geschwindigkeitsdivergenz hier nicht verschwindet.

Meteorologische Anwendung findet der zyklostrophische Rankine-Wirbel bei der Untersuchung von Tornados. Mittels eines zyklostrophischen Rankine-Wirbelmodells lassen sich je nach Bedarf Kerndruck bzw. Maximalgeschwindigkeiten abschätzen (vergleiche Markowski and Richardson (2010, S. 288)).

Darüber hinaus kann man den Rankine-Wirbel in jedem Scale verwenden, in dem modellhaft eine derartige Strömung untersucht wird. Harvey and Ambaum (2011) z.B. verwenden einen baroklinen geostrophischen Rankine-Wirbel zur Stabilitätsanalyse eines Bodentiefs.

Eine einfache interaktive Web-Anwendung als „Hurricane-Modell“ stammt von Goodrick (2011).

Selbstverständlich darf man die Analogien nicht zu weit treiben. Diese kleine Übersicht mag daher als *amuse-gueule* genügen.

4 Nebenrechnungen

4.1 Stromfunktion

Die Stromfunktion ist in Zylinderkoordinaten unter Berücksichtigung verschwindender Radialgeschwindigkeit durch folgende Beziehung definiert (z.B. Thaler, 2018-2020b):

$$\mathbf{v}_h = \mathbf{k} \times \nabla_h \Psi = \mathbf{k} \times \left(\frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \mathbf{e}_\lambda \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \lambda} \mathbf{e}_r + \frac{\partial \Psi}{\partial r} \mathbf{e}_\lambda$$

Man muss beide Fälle $r \leq R_m$ und $r > R_m$ gesondert betrachten. Für den inneren Wirbelbereich gilt:

$$r \leq R_m : \Psi(r) - \Psi_0 = \int_0^r \frac{V_m}{R_m} r' dr' = \frac{1}{2} \frac{V_m}{R_m} r^2 \text{ bzw.}$$

$$\Psi(r) = \Psi_0 + \frac{1}{2} \frac{V_m}{R_m} r^2,$$

wobei Ψ_0 als prinzipiell beliebige Integrationskonstante hier den Randwert im Zentrum des Wirbels darstellt.

An der Stelle $r = R_m$ lautet das Geopotential

$$\Psi(R_m) = \Psi_0 + \frac{V_m R_m}{2}.$$

Für den äußeren Wirbelbereich $r > R_m$ folgt mittels Einsetzen von $V = V_m R_m / r$:

$$r > R_m : \Psi(r) - \Psi(R_m) = \int_{R_m}^r \frac{V_m R_m}{r'} dr' = V_m R_m \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) \text{ bzw.}$$

$$\Psi(r) = \underbrace{\Psi_0 + \frac{V_m R_m}{2}}_{\Psi(R_m)} + V_m R_m \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) =$$

$$= \Psi_0 + V_m R_m \left[\frac{1}{2} + \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) \right].$$

4.2 Stromfeldapproximationen

4.2.1 Zyklostrophischer Wind

Die Integration von Gl. (14) erfolgt für die beiden Fälle $r \leq R_m$ mit $V = V_m r / R_m$ bzw. $r > R_m$ mit $V = V_m R_m / r$:

$$\begin{aligned} r \leq R_m : \Phi - \Phi_0 &= \int_0^r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = \int_0^r \frac{V^2}{r} dr = \int_0^r \frac{V_m^2}{R_m^2} r dr = \\ &= \left[\frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_m^2} r^2 \right]_0^r \text{ bzw.} \\ \Phi(r) &= \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R_m^2} r^2. \end{aligned}$$

Φ_0 ist wiederum eine prinzipiell beliebige Integrationskonstante und stellt hier den Geopotentialwert im Zentrum des Wirbels dar. An der Stelle $r = R_m$ beträgt das Geopotential

$$r = R_m : \Phi(R_m) = \Phi_0 + \frac{1}{2} V_m^2.$$

Anschließend berechnet man das Geopotentialdifferenz für den äußeren Bereich von R_m bis zu einer beliebigen Entfernung r :

$$\begin{aligned} r > R_m : \Phi(r) - \Phi(R_m) &= \int_{R_m}^r \frac{\partial \Phi}{\partial r} dr = \int_{R_m}^r \frac{(V_m R_m)^2}{r^3} dr = \\ &= \frac{(V_m R_m)^2}{2} \left[-\frac{1}{r^2} \right]_{R_m}^r = \\ &= \frac{1}{2} V_m^2 - \frac{1}{2} \frac{(V_m R_m)^2}{r^2} \equiv \Delta \Phi. \end{aligned}$$

Das Gesamtpotential für den äußeren Bereich ergibt sich dann als Summe des Startwertes bei R_m und der obigen Potentialdifferenz:

$$\begin{aligned} r > R_m : \Phi(r) &= \Phi(R_m) + \Delta \Phi = \\ &= \Phi_0 + V_m^2 - \frac{1}{2} \frac{(V_m R_m)^2}{r^2}. \end{aligned}$$

4.2.2 Gradientwind

Die Gradientwindrelation lautet in Zylinderkoordinaten

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r} = f_0 V_{gr} + \frac{V_{gr}^2}{r} \quad (20)$$

Die Lösung für das Geopotential des inneren Bereichs $r \leq R_m$ erhält man nach Integration der obigen Beziehung für den Geschwindigkeitsansatz der starren Rotation (Gl. 1 auf Seite 1) bis auf eine Konstante:

$$\begin{aligned} r \leq R_m : \Phi(r) - \Phi_0 &= \int_0^r \left(f_0 \frac{V_m}{R_m} r + \frac{V_m^2}{R_m^2} \frac{r^2}{r} \right) dr = \\ &= \int_0^r \frac{V_m}{R_m} \left(f_0 + \frac{V_m}{R_m} \right) r dr = \\ &= \frac{1}{2} \frac{V_m}{R_m} \left(f_0 + \frac{V_m}{R_m} \right) r^2 \end{aligned}$$

bzw.

$$r \leq R_m : \Phi(r) = \Phi_0 + \frac{1}{2} \frac{V_m}{R_m} \left(f_0 + \frac{V_m}{R_m} \right) r^2.$$

An der Stelle $r = R_m$ beträgt das Geopotential

$$\Phi(R_m) = \Phi_0 + \frac{1}{2} f_0 V_m R_m + \frac{1}{2} V_m^2.$$

Analog erhält man die Lösung für das äußere Stromfeld $r > R_m$ mit dem Geschwindigkeitsansatz für den Potentialwirbel (Gl. 2 auf Seite 1) eingesetzt in Beziehung (20) und integriert:

$$\begin{aligned} r > R_m : \Phi(r) - \Phi(R_m) &= \int_{R_m}^r \left(f_0 \frac{V_m R_m}{r} + \frac{V_m^2 R_m^2}{r^3} \right) dr = \\ &= f_0 V_m R_m [\ln r]_{R_m}^r + V_m^2 R_m^2 \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{r^2} \right]_{R_m}^r = \\ &= f_0 V_m R_m \ln \left(\frac{r}{R_m} \right) + \frac{1}{2} V_m^2 R_m^2 \left(\frac{1}{R_m^2} - \frac{1}{r^2} \right) \text{ bzw.} \end{aligned}$$

unter Einsetzen von $\Phi(R_m)$ schließlich

$$\begin{aligned} r > R_m : \Phi(r) &= \overbrace{\Phi_0 + \frac{1}{2} f_0 V_m R_m + \frac{1}{2} V_m^2}^{\Phi(R_m)} + \\ &+ f_0 V_m R_m \ln(r/R_m) + \frac{1}{2} V_m R_m^2 / R_m^2 - \frac{1}{2} V_m^2 R_m^2 / r^2 = \\ &= \Phi_0 + \frac{1}{2} f_0 V_m R_m + V_m^2 + \\ &+ f_0 V_m R_m \ln(r/R_m) - \frac{1}{2} V_m^2 R_m^2 / r^2 \end{aligned}$$

Symbole

ζ	(relative) Vorticity s^{-1}
Ψ	Stromfunktion m^2/s
Φ	Geopotential in m^2/s^2
f_0	Coriolisparameter s^{-1}
r, λ, z	Zylinderkoordinaten: radial, tangential, vertikal
$\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\lambda, \mathbf{k}$	Zylinderkoordinaten: Einheitsvektoren radial, tangential, vertikal
V bzw. V_λ	Tangentialgeschwindigkeit (in Zylinderkoordinaten)
$V_r \equiv 0$	verschwindende Radialgeschwindigkeit (in Zylinderkoordinaten)
\mathbf{v}_h	Horizontaler Windvektor

Literatur

Scott Goodrick. *Rankine Vortex: A Simple Hurricane Model*. <https://demonstrations.wolfram.com/RankineVortexASimpleHurricaneModel/>, 2011.

B. J. Harvey and M. H. P. Ambaum. *Perturbed Rankine vortices in surface quasi-geostrophic dynamics*. *Geophysical & Astrophysical Fluid Dynamics*, 105(4-5):377–391, 2011.

James R. Holton and Gregory J. Hakim. *An introduction to dynamic meteorology (5th edition)*. Elsevier - Academic Press, Amsterdam - Boston - Heidelberg - ... - Singapore - Sydney - Tokyo, 2013. ISBN 978-0-12-384866-6.

Paul M. Markowski and Yvette Richardson. *Mesoscale Meteorology in Midlatitudes*. John Wiley & Sons Inc, Chichester, 2010. ISBN 978-0-470-74213-6.

Dietmar Thaler. *Wannenbrief Nr. 10: Der Pseudogeostrophische Wind*. <https://wannenbriefe.foehnwall.at>, 2018-2020a.

Dietmar Thaler. *Wannenbrief Nr. 6: Vector Analysis - Elementary GFD Survival Kit*. <https://wannenbriefe.foehnwall.at>, 2018-2020b.