Die Totale Potentielle Energie

Herleitung für ein ideales Gases im lokalen hydrostatischen Gleichgewicht mit dem exakten Beweis für $\lim_{z\to\infty}(zp) = 0$

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 1. April 2021

Die Herleitung der totalen potentiellen Energie, also der Summe aus potentieller und innerer Energie, einer hydrostatischen trockenen Luftsäule ist in vielen Lehrbüchern im Rahmen der Untersuchungen zur Energetik der Atmosphäre zu finden. Dabei wird meist unter einer lapidaren Nebenbemerkung der intuitive Satz verwendet, dass das Produkt aus Vertikalkoordinate z und Luftdruck am Oberrand der Atmosphäre im Grenzwert für $z \longrightarrow \infty$ verschwindet, ohne den mathematisch schlüssigen Beweis dafür zu liefern. Dieser Beweis wird hier, den Vorwurf des Sophismus nicht fürchtend, nachgeholt.

1 Voraussetzungen und Definitionen

Gegeben sei eine trockene ideale Gasatmosphäre im Schwerefeld der Erde im lokalen hydrostatischen Gleichgewicht.[1] Die *potentielle Energie* eines Luftpaketes pro Volumeneinheit lautet unter der Annahme einer konstanten Schwerebeschleunigung[2] (bis auf den Nullpunkt):

$$\phi = \rho g z\,. \tag{1}$$

Die *innere Energie* eines Luftpaketes pro Volumeneinheit lautet (bis auf den Nullpunkt):

$$u = \rho c_v T\,. \tag{2}$$

Die Summe aus potentieller und innerer Energie, die *totale potentielle Energie*, einer vertikalen Luftsäule pro Einheitsfläche lautet für beliebige Integrationsgrenzen:

$$P = \Phi + U = \int \rho\,(c_v T + gz)\ \mathrm{d}z\,. \tag{3}$$

Die *hydrostatische Beziehung* lautet in differenzieller Schreibweise:

$$\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}z\,. \tag{4}$$

Die *ideale Gasgleichung* für trockene Luft lautet:

$$\rho = \frac{p}{RT}\,. \tag{5}$$

Weiters ist aus der Thermodynamik für ein ideales Gas der *Zusammenhang zwischen den massenspezifischen Wärmen* bei konstantem Volumen c_v und konstantem Druck c_p bekannt:

$$c_p = c_v + R\,. \tag{6}$$

[1]Die folgenden Beziehungen finden sich z.B. in Hantel (2013), zumeist in Kapitel 6.

[2]Alle Höhenangaben sind daher strenggenommen in geopotentiellen Einheiten zu verstehen.

2 Die totale potentielle Energie

Für die totale potentielle Energie einer Luftsäule zwischen den Niveaus $z_0 \le z < z_1$ gilt (Beweis siehe Abschnitte 3.1 und 3.2):

$$\begin{aligned} P = &\int_{z_0}^{z_1} \rho\,(c_v T + gz)\ \mathrm{d}z = \\ =&(z_1 p_1 - z_0 p_0) + \int_{z_0}^{z_1} \rho c_p T\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned} \tag{7}$$

Für die gesamte Luftsäule vom Boden $p_0 = p(z = 0)$ bis zum Oberrand der Atmosphäre $p_1 = p(z_1 \to \infty) = 0$ gilt (Beweis siehe Abschnitt 3.2):

$$\boxed{P = \int_0^\infty \rho\, c_p T\,\mathrm{d}z = H}\,. \tag{8}$$

Die totale potentielle Energie gleicht somit der trockenen Enthalpie der gesamten Luftsäule vom Boden bis zum Oberrand der Atmosphäre. [3]

3 Herleitungen

3.1 Die potentielle Energie

Für die potentielle Energie zwischen zwei Niveaus z_0 und z_1 gilt mit der hydrostatischen Beziehung (4) und der Transformation der Integrationsgrenzen (Umkehrung des Vorzeichens):

$$\Phi = \int_{z_0}^{z_2} \rho g z\,\mathrm{d}z = \int_{p_1}^{p_0} z\,\mathrm{d}p\,.$$

Mittels partieller Integration $f\,\mathrm{d}g = \mathrm{d}(fg) - g\,\mathrm{d}f$ lässt sich das Integral unter neuerlicher Transformation der Integrationsgrenzen umwandeln in:

$$\begin{aligned} \Phi &= zp|_{p_1}^{p_0} + \int_{z_0}^{z_1} p\,\mathrm{d}z \\ &= (z_0 p_0 - z_1 p_1) + \int_{z_0}^{z_1} p\,\mathrm{d}z\,. \end{aligned} \tag{9}$$

[3]Die Annahme, dass die Integration vom Boden bei $z_0 = 0$ beginnt, kann ohne Änderung des Endergebnisses gelockert werden, wenn man die Integrationsvariable z durch $z' = z - z_0$, $z_0 \neq 0$ mit $z'(z0) = 0$ ersetzt. Es kommt nur zu einer Verschiebung des Nullpunktes.

Setzt man die ideale Gasgleichung $p = R\rho T$ für den Druck im Integranden ein, dann erhält man:

$$\Phi = (z_0 p_0 - z_1 p_1) + \int_{z_0}^{z_1} \rho\, RT\, \mathrm{d}z\,. \tag{10}$$

3.2 Die totale potentielle Energie

Addiert man die Beziehung (2) für die innere Energie zu Gleichung (10) für die potentielle Energie und verwendet die Relation (6) $c_p = R + c_v$, folgt unmittelbar die Gleichung (7) für die totale potentielle Energie:

$$P = (z_0 p_0 - z_1 p_1) + \int_{z_0}^{z_1} \rho\, c_p T\, \mathrm{d}z\,.$$

Wie lautet nun der Grenzwert von Gl. (7) für $z_0 \longrightarrow 0$ und $z_1 \longrightarrow \infty$, also die totale potentielle Energie einer Luftsäule vom Boden bis zum Oberrand der Atmosphäre?

Der erste Term in der Klammer verschwindet, weil p_0 endlich ist und $z_0 = 0$. Problematischer ist der zweite Term. In den meisten Lehrbüchern wird hier nur lakonisch festgestellt, dass am Oberrand der Atmosphäre der Druck gleich null ist und der Ausdruck *deshalb* verschwindet[4], z.B. in Hantel (2013, S. 393), aber auch in Dutton (1976), Pichler (1997) , Lange (2002) und Zdunkowski und Bott (2004). Allerdings ist für z gegen unendlich das Produkt pz zunächst unbestimmt. Somit ist eine genauere Rechnung erforderlich.

Der im Rahmen der Voraussetzungen exakte Beweis für $\lim\limits_{z\to\infty}(zp) = 0$ verwendet die Regel von Bernoulli - L'Hospital (Bronstein u. a. 2008, Seite 56 f.), die besagt, dass der Grenzwert des Quotienten zweier Funktionen gleich ist dem Grenzwert des Quotienten der ersten Ableitung dieser Funktionen (falls *dieser* Grenzwert existiert):

$$\lim \frac{f(z)}{g(z)} = \lim \frac{\mathrm{d}f/\mathrm{d}z}{\mathrm{d}g/\mathrm{d}z}\,. \tag{11}$$

Unter Verwendung der hydrostatischen Relation (4) sowie der Gasgleicheichung (5) und unter Berücksichtigung der Umstände, dass der Druck am Oberrand der Atmosphäre verschwindet ($p_\infty = 0$) und die Temperatur da jedenfalls positiv definit ist ($0 < T_\infty < \infty$), folgt mit der Regel (11):

$$\begin{aligned}
\lim_{z\to\infty}(zp) &= \lim_{z\to\infty}\frac{z}{p^{-1}} = \lim_{z\to\infty}\frac{\frac{dz}{dz}}{\frac{d(p^{-1})}{dz}} = \\
&= \lim_{z\to\infty}\frac{1}{-p^{-2}\frac{dp}{dz}} = \lim_{z\to\infty}\frac{p^2}{\rho g} = \\
&= \lim_{z\to\infty}\frac{RTp^2}{pg} = \lim_{z\to\infty}\frac{R}{g}Tp = 0\,,
\end{aligned}$$

womit

$$zp|_{p_\infty=0}^{p_0} = 0$$

bewiesen ist.

Damit folgt für die totale potentieller Energie der Luftsäule vom Boden bis zum Oberrand der Atmosphäre:

$$P = \int_0^\infty \rho\, c_p T\, \mathrm{d}z\,. \tag{12}$$

[4]Intuitiv ist die Behauptung nachvollziehbar, wenn man davon ausgeht, dass im Weltraum der Luftdruck schon in endlicher Höhe über der Erdoberfläche verschwindet.

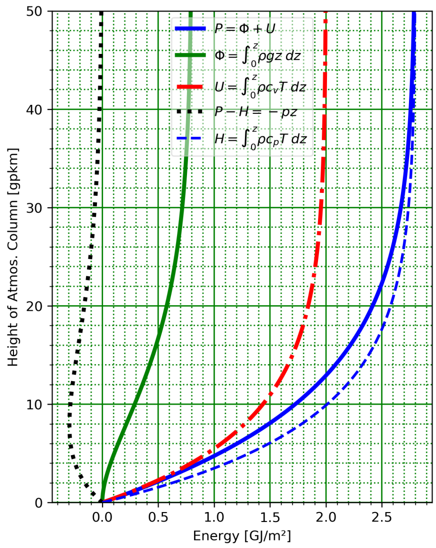

Abbildung 1: Verschiedene Energieformen für eine Luftsäule wachsender Höhe. Die Atmosphäre bestehe aus einem idealen Gas, sei isotherm und im Schwerefeld der Erde hydrostatisch (Temperatur 270 K, Bodendruck 1013,25 hPa).

4 Einfaches Beispiel zur Veranschaulichung

Um eine Gefühl für die Größenordnungen und das Verhältnis der unterschiedlichen Größen Φ, U, H und $(P - H)$ zu bekommen, mag als Modell eine isotherme Atmosphäre mit $T = 270\,K$ sowie dem Bodenluftdruck $p_0 = 1013,25\,hPa$ genügen (siehe Abb. 1).

Für die numerische Integration wurden folgende Druck- und Luftdichtebeziehungen verwendet:

$$\begin{aligned}
p(z) &= p_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right) \\
\rho(z) &= \rho_0 \exp\left(-\frac{gz}{RT}\right)
\end{aligned}$$

mit $\rho_0 = p_0/(RT)$.

Die jeweiligen Größen sind beginnend vom Boden $z_0 = 0$ in Abhängigkeit von der oberen Integrationsgrenze z zu verstehen. Daran erkennt man, dass zum Oberrand der Atmosphäre hin für sehr große z die totale potentielle Energie P mit der Enthalpie H zusammenfällt. Für endliche Höhen gilt $H > P$ und der Differenzbetrag $P - H$ ist wie erwartet identisch mit $z_0 p_0 - zp = -zp$. Die Größenordnungen der Energiewerte liegen im Bereich von Gigajoule pro Quadratmeter. Gut zu sehen ist auch, dass zp für große Höhen gegen Null strebt, dass also der Druck mit der Höhe „rascher" gegen Null geht als die Höhe gegen unendlich.[5]

[5]Eine einfache Abschätzung zeigt, dass die kinetische Energie pro Volumeneinheit sehr viel niedriger ist als die potentielle Energie. Wenn ρ_s die mittlere Luftdichte, H_s die vertikale Skalenhöhe der Dichte, $U \approx 20$ eine typische horizontale Windgeschwindigkeit, $T_s \approx 250$ eine typische atmosphärische Temperatur und $c_p \approx 1000$ die spezifische Wärme bei konstantem Druck ist (alle Größen in SI-Einheiten), dann erhält man:

$$\mathrm{mag}\left\{\frac{K}{P}\right\} = \frac{(U^2/2)\ \rho_s H_S}{c_p T_S\ \rho_s H_S} = \frac{200}{250\,000} \approx 10^{-3}\,.$$

Somit kann man bei der Betrachtung von absoluten Größen die kinetische Energie vernachlässigen. Nicht vernachlässigen kann man die kinetische

Symbole

ρ	Luftdichte
ϕ	potentielle Energie pro Volumeneinheit
Φ	potentielle Energie der Luftsäule pro Flächeneinheit
$c_p = 1005\,\mathrm{J/(kg\,K)}$	spezifische Wärme von Luft bei konstantem Druck
$c_v = 718\,\mathrm{J/(kg\,K)}$	spezifische Wärm von Luft bei konstanten Volumen
$g = 9.80665\,\mathrm{m/s^2}$	vertikal konstante Schwerebeschleunigung
H	Enthalpie der Luftsäule pro Flächeneinheit
p	Luftdruck
P	Totale potentielle Energie der Luftsäule pro Flächeneinheit
$R = 287\,\mathrm{J/(kg\,K)}$	Gaskonstante von Luft
T	Temperatur
u	innere Energie pro Volumeneinheit
U	innere Energie der Luftsäule pro Flächeneinheit
z	Vertikalkoordinate (in geopotentiellen Einheiten)

Literatur

Bronstein, I.N. u. a. (2008). *Taschenbuch der Mathematik (7. Auflage).* Frankfurt am Main: Verlag Harry Deutsch.

Dutton, John A. (1976). *The ceaseless wind. An introduction to the theorie of atmospheric motion.* New York, .., Toronto: McGraw-Hill Book Company.

Hantel, Michael (2013). *Einführung Theoretische Meteorologie.* Springer Spektrum. Springer Verlag Berlin-Heidelberg.

Lange, Hans-Joachim (2002). *Die Physik des Wetters und Klimas. - Ein Grundkurs zur Theorie des Systems Atmosphäre.* Dietrich Reimer Verlag. Berlin.

Pichler, Helmut (1997). *Dynamik der Atmosphäre.* Spektrum Hochschultaschenbuch. Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin-Oxford.

Zdunkowski, Wilford und Andreas Bott (2004). *Thermodynamics of the Atmosphere - A Course in Theoretical Meteorology.* Cambridge - New York - Melbourne - Cape Town - Madrid: Cambridge University Press.

Energie dann, wenn es um Energieflüsse zwischen den einzelnen Energieformen geht, wie sie in der Energetik der Atmosphäre mit dem Konzept der *available potential energy* im Fokus stehen.