Elementares zur Kelvin-Helmholtz Instabilität

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 2. Dezember 2018

Die *Kelvin-Helmholtz-Instabilität*[1] ist eine der grundlegenden Instabilitäten vertikal geschichteter Strömungen im Schwerefeld. Obwohl sie als Hauptmechanismus für die Auflösung von Inversionen verantwortlich gemacht wird, findet sie in den üblichen einführenden Lehrbüchern der theoretischen Meteorologie eher untergeordnete Beachtung. Zu diesem Zweck wird hier die elementare partikeltheoretische Stabilitätsanalyse gezeigt, die zum bekannten Stabiltätskriterium $\mathrm{Ri} > 1/4$ führt. Die exaktere Behandlung des Problems über die Analyse der *Taylor-Goldstein-Gleichung* kann hier nur erwähnt werden. Gedanken zur Nebelauflösung schließen die Abhandlung.

1 Beobachtungen

Vertikal geschichtete Strömungen zeigen gelegentlich eine Form von Instabilität, die sowohl im Laborexperiment als auch in der Natur beobachtet werden kann. Wenn sich ein dichteres Fluidum unter einem weniger dichten Fluidum befindet, dann bleibt die Schichtung bei ruhender Strömung erhalten. Kleine Störungen führen zu Schwereoszillationen oder internen Schwerewellen, deren Amplitude mit der Zeit abklingt. Wenn nun zwischen den beiden Fluiden eine vertikale Scherung der horizontalen Strömung existiert, dann bilden sich durch unvermeidliche kleine Störungen interne Schwerewellen, die zunächst noch stabil bleiben. Erhöht man nun die Scherströmung (oder reduziert die vertikale Dichtedifferenz), dann kann man beobachten, wie die Wellen amplifizieren, zu brechen beginnen und dabei eine Struktur erzeugen, die gelegentlich als *cat's eyes* (Katzenaugen) bezeichnet wird. In weiterer Folge kommt es zu turbulenter Durchmischung, vergleiche Abbildung 1. Diese Instabilität wird nach ihren Findern Kelvin-Helmholtz-Instabilität genannt.

In der Atmosphäre sind *cat's eyes* vielfältig zu beobachten, wenn sie mit der Kondensation von Wasserdampf einhergehen. Man kann sie als Instabilitäten an Altocumulus-Bewölkung bis hin zu ziehenden und sich auflösenden *low stratus* Schwaden erkennen. Nicht immer ist atmosphärische Kelvin-Helmholtz-Instabilität sichtbar. Z.B. wird sie gelegentlich für die nicht an Wolken gebundene *clear air turbulence* verantwortlich gemacht. Auch im Ozean sowie in geschichteten Strömungen aller Art ist die Kelvin-Helmholtz-Instabilität mess- und beobachtbar.

Für Bild- und Videobeispiele siehe z.B. Imster (2017) , Merrifield und Haran (2017), Turnbull und Haran (2017). Mit etwas Googeln findet man viele mehr.

[1] Benannt nach William Thomson (geadelter Lord Kelvin, 1824-1907) und Hermann von Helmholtz (1821-1994)

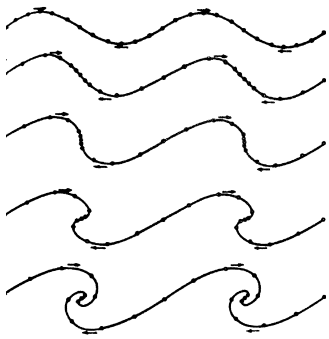

Abbildung 1: Schematische Entwicklung der Kelvin-Helmholtz-Instabilität in einem geschichteten Fluidum mit vertikaler Scherung (vereinfacht nach Rosenhead, 1931).

2 Vorbemerkungen

Allgemein bekannt ist das Konzept der hydrostatischen Stabilität bzw. Instabilität. In einem (quasi-)inkompressiblen[2] vertikal geschichteten Fluidum im Schwerefeld bedeutet eine Abnahme der Dichte mit der Höhe eine stabile Schichtung, während eine Zunahme der Dichte mit der Höhe eine instabile bzw. labile Schichtung ergibt. Schon eine geringfügige Störung bringt die labile Schichtung aus dem Gleichgewicht und es erfolgt turbulente Umverteilung zu einem stabilen bzw. zumindest zu einem nicht-labilen Endzustand. Im stabilen Fall führt eine Störung des Gleichgewichtes zu einer Schwingung um den Ruhezustand. Der formale Nachweis gelingt am einfachsten über die Stabilitätsanalyse eines Partikelmodells, z.B. Cushman-Roisin und Beckers (2011), Seite 348 f.

Die Stabilitätsbedingung lautet formal

$$N^2 = -\frac{g}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial z} > 0\,. \tag{1}$$

N ist die sogenannte Brunt-Väisälä-Frequenz[3], die angibt, mit welcher Kreisfrequenz $2\pi/\tau$ ein Paket bei stabiler Schichtung um die Ausgangslage schwingt. Eine imaginäre Frequenz ($N^2 < 0$) beschreibt das exponentielle Wachstum bei Instabilität.

[2] Inkompressibel bedeutet nur, dass die Dichte nicht vom Druck abhängt. Die Dichte kann aber von anderen Zustandsgrößen, wie z.B. Temperatur und Salinität, abhängen.

[3] In der kompressiblen Atmosphäre ändert sich der Ausdruck für die Brunt-Väisälä-Frequenz und das Stabilitätskriterium zu $N^2 = +(g/\Theta)(\partial\Theta/\partial z) > 0$ und heißt, dass eine Zunahme der potenziellen Temperatur mit der Höhe Stabilität, eine Abnahme Labilität bedeutet. Für hinreichend geringe vertikale Erstreckungen kann aber auch die Atmosphäre als nahezu inkompressibel angenommen werden.

Zusätzlich zur rein thermischen Schichtung sei jetzt noch ein Vertikalgradient im horizontalen Geschwindigkeitsfeld angenommen. Wie sich zeigen wird, kann vertikale Windscherung eine statisch stabile Schichtung labilisieren.

3 Zweischichten-Partikelmodell der Kelvin-Helmholtz-Instabilität

Die Darstellung folgt den Ausführungen in Nappo (2013), Seite 118 ff. Man denke sich eine inkompressible Flüssigkeit mit der Dichte ρ_A und der Geschwindigkeit U_A in der Höhe z_A unten und eine Flüssigkeit mit der Dichte ρ_B und der Geschwindigkeit U_A in der Höhe z_B oben. Alle Betrachtungen gelten nun für die idealisierten individuellen Pakete A und B, die sich zunächst in den jeweiligen Höhen $z_A$und z_B befinden.

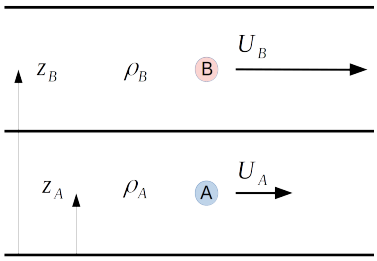

Abbildung 2: Anfangszustand I: Schematische Skizze eines geschichteten Fluidums mit Windscherung als Zweischichtenmodell mit höherer Dichte (relativer Kaltluft) in der unteren Schicht A und geringerer Dichte (relativer Warmluft) in der oberen Schicht B.

Für diesen Ausgangszustand I (*initial*, vergleiche Abb. 2) lässt sich die Gesamtenergie E_I als Summe aus potenzieller Energie P_I und kinetischer Energie K_I berechnen. Es wird nun die Frage untersucht, wie sich die Gesamtenergie für einen hypothetischen Endzustand F (*final*) ändert ($E_F = P_F + K_F$), wenn die Pakete A und B ihren Ort wechseln und dabei durch Impulsaustausch eine gemeinsame Geschwindigkeit annehmen (vergleiche Abb. 3). Ist die *Endenergie größer als die Anfangsenergie*, dann muss für den Tausch Arbeit aufgewendet werden, der Anfangszustand ist *stabil*. Ist die *Endenergie kleiner als die Anfangsenergie*, dann wird bei der Durchmischung Arbeit frei, der Anfangszustand ist instabil bzw. *labil*:

$$\begin{aligned} W = E_F - E_I &> 0 \quad \ldots \text{ stabil} \\ W = E_F - E_I &< 0 \quad \ldots \text{ labil}\,. \end{aligned} \tag{2}$$

Für den Anfangszustand gilt:

$$\begin{aligned} P_I &= g(\rho_A z_A + \rho_B z_B) \\ K_I &= \frac{1}{2}(\rho_A U_A^2 + \rho_B U_B^2) \\ E_I &= P_I + K_I\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Die Umschichtung zum Zustand F erfolge unter der Bedingung, dass die Masse pro Volumeneinheit, also die Dichte, der Pakete beim Umtausch erhalten bleibt $\rho_A + \rho_B = \rho_B + \rho_A = \text{const}$ und dass der Impuls pro Volumeneinheit konserviert wird, sich die Geschwindigkeit der Pakete aber wie bei

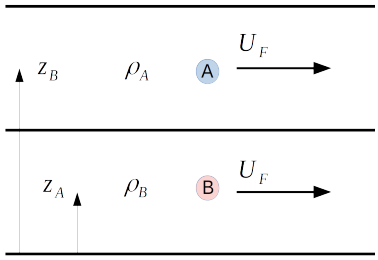

Abbildung 3: Endzustand F: Nach der gedachten turbulenten Durchmischung befindet sich das vormals untere Fluidumspaket A nun oben und das andere Paket B unten. Die Geschwindigkeit hat sich durch anelastischen Stoß auf einen Mittelwert angepasst.

einem anelastischen Stoß angleicht. D.h., aus der Impulserhaltungsbedingung $\rho_A U_A + \rho_B U_B = (\rho_A + \rho_B) U_F$ folgt unmittelbar

$$U_F = \frac{\rho_A U_A + \rho_B U_B}{\rho_A + \rho_B}\,. \tag{4}$$

Für den Endzustand F gelten dann für die potenzielle, die kinetische und die totale Energie pro Volumeneinheit:

$$\begin{aligned} P_F &= g(\rho_B z_A + \rho_A z_B) \\ K_F &= \frac{1}{2}(\rho_A + \rho_B) U_F^2 \\ E_F &= P_F + K_F\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Zur Berechnung der Energiedifferenz W berechnen wir zuerst die Differenz der potenziellen Energien[4]:

$$\Delta P = P_F - P_I = -g\Delta\rho\Delta z\,.$$

mit $\Delta\rho = \rho_B - \rho_A$ und $\Delta z = z_B - z_A$. Für die Differenz der kinetischen Energie ΔK erhält man nach längerer Umformung (siehe Abschnitt Nebenrechnungen) unter Verwendung von Gleichung (4):

$$\Delta K = -\frac{1}{2}\frac{\rho_A \rho_B}{\rho_A + \rho_B}(\Delta U)^2\,.$$

Zusammengefasst lautet die am System zu leistende Arbeit ($W > 0$) oder vom System freigesetzte Arbeit ($W < 0$):

$$\begin{aligned} W &= \Delta P + \Delta K \\ &= -g\Delta\rho\Delta z + -\tfrac{1}{2}\tfrac{\rho_A\rho_B}{\rho_A+\rho_B}(\Delta U)^2 \end{aligned} \tag{6}$$

ΔP kann dabei als die „thermische“ Turbulenz bzw. *bouyancy* zufolge von Dichteschwankungen bezeichnet werden und ΔK als die mechanische Turbulenz. Während die mechanische Turbulenz ΔK negativ definit ist, also die Stabilität stets verringert, kann die *bouyancy* ΔP beide Vorzeichen annehmen. Statische Stabilität (unten dichtes, oben dünnes Medium mit $\Delta\rho = \rho_B - \rho_A < 0$) erhöht die Gesamtstabilität. Aus der statischen Labilität folgt hingegen unbedingte Instabilität des Systems.

Um zu einem griffigeren und allgemeineren Stabilitätskriterium zu kommen, muss man die relevanten Terme in Gleichung (6) etwas umformen (siehe Abschnitt Nebenrechnungen) und erhält:

$$W = (\Delta z)^2 \bar{\rho}\left[-\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] > 0\,.$$

[4] Im Detail: $g(\rho_B z_A + \rho_A z_B) - g(\rho_A z_A + \rho_B z_B) =$
$= g(\rho_B z_A + \rho_A z_B - \rho_A z_A - \rho_B z_B = (\rho_B - \rho_A)(z_A - z_B)$

Weil der Faktor außerhalb der Klammer positiv definit ist, genügt die Untersuchung des Klammerausdrucks. Daraus folgt unmittelbar $-\frac{g}{\bar{\rho}}\partial\rho/\partial z > \frac{1}{4}\left(\partial u/\partial z\right)^2$. Das Stabilitätskriterium lautet somit mittels Definition der **Richardsonzahl** (das Verhältnis von Brunt-Väisälä-Frequenz zu dem Quadrat der vertikalen Windscherung[5]):

$$\boxed{Ri = \frac{-\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial z}}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} = \frac{N^2}{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2} > \frac{1}{4}\,.} \tag{7}$$

Damit lassen sich nun ausgehend von den Kriterien in Gl. (1) und Gl. (2) allgemeine Kriterien für Stabilität bzw. Labilität formulieren:

$$\begin{aligned} N^2 < 0 \;\Rightarrow Ri < 0 \quad &: \quad \text{unbedingt labil (hydrostatisch labil)} \\ 0 < Ri < 1/4 \quad &: \quad \text{mechanisch labil} \\ Ri > 1/4 \quad &: \quad \text{unbedingt stabil} \end{aligned}$$

Die hier präsentierte Herleitung hat sich einer semiheuristischen Methode mit gewissen Willkürlichkeiten bedient, deren Vorteil jedoch die konzeptionelle Einfachheit ist. Eine sorgfältigere Behandlung führt von einem linearisierten hydrodynamischen Grundgleichungssystem über einen horizontalen Fourier-Ansatz für die Stromfunktion Ψ hin zur *Taylor-Goldstein-Gleichung* (Cushman-Roisin und Beckers 2011, Seite 432 ff.), einer gewöhnlichen Differenzialgleichung in der einzig verblieben Koordinate z:

$$(\bar{u} - c)\left(\frac{d^2\Psi}{dz^2} - k^2\Psi\right) + \left(\frac{N^2}{\bar{u} - c} - \frac{d^2\bar{u}}{dz^2}\right)\Psi = 0\ .$$

Gemeinsam mit passenden Randbedingungen und weiteren vereinfachenden Annahmen erhält man nach einiger Rechnung das bekannte Stabilitätskriterium gemäß Formel (7) bestätigt.

4 Beispiel: Nebelauflösung

Bodennebel oder sehr tiefer Hochnebel ist so gut wie immer mit einer bodennahen Inversion verbunden. In Bodennähe ist es in aller Regel windschwach. Oberhalb der Bodeninversion weht ein in der Regel stärkerer synoptischer Wind, der zu einer vertikalen Windscherung führt. Neben den vielen Möglichkeiten, wie sich Nebel bildet, gibt es auch mehrere, wie er sich auflöst. Ein häufiges Szenario mag folgendes sein:

1. Zu Beginn ist die Atmosphäre hydrostatisch sehr stabil, sodass die Brunt-Väisälä-Frequenz $N^2 \gg 0$ ist und somit für die Richardsonzahl gilt: $Ri \gg 1/4$.
2. Beginnende solare Einstrahlung wärmt die Luft von unten. Die Brunt-Väisäla-Frequenz nimmt ab, die Atmosphäre wird hydrostatisch weniger stabil.
3. Bei sonst gleicher Windscherung $|\partial u/\partial z|$ kann sich die Richardsonzahl von hochstabilen Werten weg dem kritischen Wert $Ri \approx 1/4$ nähern.
4. Es bilden sich Schwerewellen, welche instabil werden und Katzenaugen formen. Mit den brechenden Wellen kommt es zu Durchmischung und damit zu Nebel- bzw-Hochnebelauflösung.

[5] $|\partial u/\partial z| = M$ wird auch gelegentlich als *Prandtl-Frequenz* bezeichnet

Wegen der Kelvin-Helmholtz-Instabilität kann es zu Nebelauflösung kommen, ohne dass die Bodeninversion vorher zur Gänze abgebaut wird.

Nebenrechnungen

Mechanische Energie $K_F - K_I$

$$\begin{aligned} K_F - K_I &= \frac{1}{2}\frac{(\rho_A U_A + \rho_B U_B)^2}{\rho_A + \rho_B} - \frac{1}{2}(\rho_A {U_A}^2 + \rho_B {U_B}^2) = \\ &= \frac{(\rho_A U_A + \rho_B U_B)^2}{2(\rho_A + \rho_B)} - \frac{(\rho_A + \rho_B)(\rho_A {U_A}^2 + \rho_B {U_B}^2)}{2(\rho_A + \rho_B)} = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_A + \rho_B}[(\rho_A U_A + \rho_B U_B)^2 - \\ &\quad - (\rho_A + \rho_B)(\rho_A {U_A}^2 + \rho_B {U_B}^2)] = \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\rho_A + \rho_B}[\cancel{\rho_A {}^2 U_A{}^2} + 2\rho_A\rho_B U_A U_B \cancel{+\rho_B {}^2 U_B{}^2} \\ &\quad \cancel{-\rho_A {}^2 U_A{}^2} - \rho_A\rho_B {U_B}^2 - \rho_A\rho_B {U_A}^2 \cancel{-\rho_B {}^2 U_B{}^2}] = \\ &= -\frac{\rho_A\rho_B}{2(\rho_A + \rho_B)}(U_B - U_A)^2 \end{aligned}$$

Zur Herleitung des Ri-Kriteriums

Für die *bouyancy* gilt

$$\Delta P = -g\Delta\rho\Delta z \approx -g\frac{\partial\rho}{\partial z}(\Delta z)^2$$

Für die mechanische Energie gilt

$$\Delta K = -\frac{\rho_A\rho_B}{2(\rho_A + \rho_B)}\Delta U^2 \approx -\frac{\bar{\rho}^2}{4\bar{\rho}}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\right)^2\ ,$$

wobei $\bar{\rho} = (\rho_A + \rho_B)/2$ die mittlere Dichte ist und $\rho_A\rho_B = (\bar{\rho}+\rho')(\bar{\rho}-\rho') = \bar{\rho}^2 - \rho'^2 = \bar{\rho}^2(1-\rho'^2/\bar{\rho}^2) \approx \bar{\rho}^2$, weil $\rho'^2/\bar{\rho}^2 \ll 1$. Für die gesamte am System zu leistende Arbeit gilt somit:

$$W = \Delta P + \Delta K = (\Delta z)^2\bar{\rho}\left[-\frac{g}{\bar{\rho}}\frac{\partial\rho}{\partial z} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right]\ .$$

Symbole

Δ	Differenz der Größen $()_B - ()_A$ bzw. $()_F - ()_I$
$\bar{\rho}$, ρ	(mittlere) Dichte des Fluidums
Ψ	Stromfunktion der Taylor-Goldstein-Gleichung mit $u' = +\partial\Psi/\partial z$, $w' = -\partial\Psi/\partial x$
τ	Schwingungsperiode der vertikalen Schwereoszillation
Θ	potenzielle Temperatur
g	Schwerebeschleunigung
K	kinetische Energie pro Volumeneinheit
ΔK	kinetische Turbulenz-Energie
M	Prandtl-Frequenz
N	Brunt-Väisälä-Frequenz
P	potenzielle Energie pro Volumeneinheit
ΔP	thermische Turbulenz-Energie, *bouyancy*
Ri	Richardsonzahl
U	Horizontalgeschwindigkeit
$W = \Delta E_F - \Delta E_I$	Austausch-Arbeit für die Pakete A und B
z	Vertikalkoordinate

Literatur

Cushman-Roisin, Benoit und Jean-Marie Beckers (2011). *Introduction to Geophysical Fluid Dynamics - Physical and Numerical Aspects (2nd edition)*. Elsevier - Academic Press - Amsterdam, .., Tokyo.

Imster, Eleanor (2017). *Clouds that look like ocean waves*. https://earthsky.org/earth/kelvin-helmholzt-clouds. earthsky.org.

Merrifield, Mike und Brady Haran (2017). *Kelvin-Helmholtz Instability - Sixty Symbols*. https://www.youtube.com/watch?v=qgamfo86FQo. Sixty Symbols.

Nappo, Carmen J. (2013). *An Introduction to Atmospheric Gravity Waves (2nd edition)*. Elsevier - Academic Press (Amsterdam, .., Tokyo).

Rosenhead, L. (1931). "The formation of vortices from a surface discontinuity." In: *Proc. of the Royal Soc.* Series A. http://rspa.royalsocietypublishing.org/content/134/823/170, S. 170–192.

Turnbull, Barbara und Brady Haran (2017). *More Kelvin-Helmholtz (The Experiment) - Sixty Symbols*. https://www.youtube.com/watch?v=mf_143gkKSQ. Sixty Symbols.