

# Der Badewannenwirbel

## und die Corioliskraft

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont - Cres/Kroatien, 16. Sept 2018, Ergänzung: 18. Nov 2018

Es hält sich hartnäckig das Gerücht, dass *Abflusswirbel* in Waschbecken und Badewannen durch die Ablenkung der Corioliskraft zufolge der Erdrotation auf der Nordhalbkugel gegen den Uhrzeigersinn, auf der Südhalbkugel mit dem Uhrzeigersinn, also immer *zyklonal*, abrinnen. Während die breite Öffentlichkeit dieser Ansicht folgt, wissen es Meteorologen besser. Die Corioliskraft ist viel zu klein, um hier einen Einfluss zu zeigen. Stimmt das?

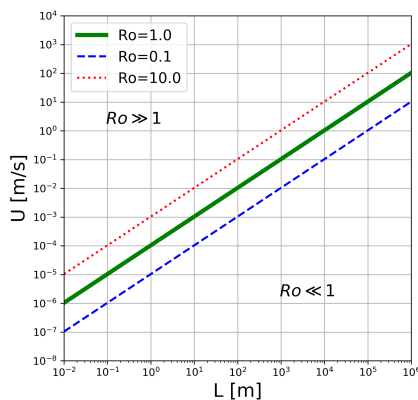
Corioliskraft erst für sehr niedrige(!) Strömungsgeschwindigkeiten eine Rolle: In Swimmingpool-Dimensionen für Geschwindigkeiten *unterhalb* von einigen Millimeter/Sekunde, im Waschbecken etwa 10 Mikrometer/Sekunde. - Daher ist die Vermutung der Fachleute wohl bestätigt: *Die Erdrotation bzw. die Corioliskraft hat keinen Einfluss auf die Strömung in Swimmingpool und Waschbecken. Sie ist kontrolliert durch Trägheitskräfte.*

## 1 Rossbyzahl

Untersucht werden inkompressible Wasserströmungen ( $\rho = \rho_0 = \text{const}$ ) in „Haushaltsdimensionen“ vom Waschbecken bis zum Swimmingpool mit charakteristischen Größenordnungen  $L = 0,1 \dots 10$  m. Die maßgebliche Kennzahl für die Wirkung der Corioliskraft im rotierenden Bezugssystem ist die Rossby-Zahl, die das Verhältnis von Trägheitskraft zu Corioliskraft beschreibt:

$$Ro = \frac{|\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}|}{|f \mathbf{k} \times \mathbf{v}_h|} = \frac{U}{fL},$$

wobei  $f = 2\Omega \sin(\varphi)$  der Coriolisparameter ist, der am Äquator verschwindet und an den Polen den Maximalbetrag zeigt. In gemäßigten Breiten gilt  $f \approx 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ . Der Rossby-Parameter beschreibt qualitativ die Wirkung der Corioliskraft auf horizontale Strömungen. Rossby-Parameter sehr viel kleiner als eins bedeuten, dass die Corioliskraft den Charakter der Strömung bestimmt, Rossby-Parameter sehr viel größer als eins bedeuten, dass die Corioliskraft vernachlässigbar ist.



Die Grafik zeigt die charakteristische Geschwindigkeit bzw. Länge in Abhängigkeit vom Rossby-Parameter. Betrachtet man die üblichen Wannen-Dimensionen, dann spielt die

## 2 Vorticitygleichung

Allerdings ist die Strömung in einem ungestörtem Becken anfänglich idealerweise tatsächlich in Ruhe, womit automatisch gilt  $Ro \ll 1$ , daher kann zumindest ganz zu Beginn die Erdrotation einen Einfluss zeigen. Betrachten wir nun als Prototypen für ein ausfließendes Waschbecken eine Art Trichter mit einer oberen Öffnungsfläche  $A_o = \pi r_o^2$  und einer unteren Öffnungsfläche  $A_u = \pi r_u^2$ , wobei gelte  $r_o \gg r_u$  und erst recht  $A_o \gg A_u$ .

Ausgangspunkt sei die nahezu komplette Vorticitygleichung für ein Fluidum auf der rotierenden Erde in gemäßigten Breiten auf der Tangentialebene (z.B. Pichler, 1997, Seite 229):

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v}_h \cdot \nabla_h \eta + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\eta \nabla_h \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{k} \cdot \nabla_h w \times \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} - \mathbf{k} \cdot \nabla_h \left( \frac{1}{\rho} \right) \times \nabla_h p - \mathbf{k} \cdot \nabla_h \times \mathbf{f}_r. \quad (1)$$

mit der absoluten (vertikalen) Vorticity  $\eta = \zeta + f$ , der Summe aus der *relativen Vorticity* und der *Erdvorticity* (dem Coriolisparameter).

Man kann die obige Gleichung mit mehr oder weniger plausiblen Annahmen stark vereinfachen. Zunächst nehmen wir Reibungsfreiheit an, womit der letzte Term auf der rechten Seite in Gl. 1 verschwindet. Da es sich beim Fluidum um Wasser handelt, ist es inkompressibel. Gleichzeitig vernachlässigen wir jede Temperaturabhängigkeit der Dichte bzw. nehmen Isothermie an, damit gilt  $\nabla \rho = 0$  und somit verschwindet der *Solenoidterm* (vorletzter Term der rechten Seite). Nimmt man weiters an, dass die horizontale Komponente der Geschwindigkeit sich vertikal nicht ändert ( $\partial \mathbf{v}_h / \partial z = 0$ ), die Strömung also vertikal homogen ist, dann verschwinden sowohl der *Twistingterm* (zweiter Term auf der rechten Seite) als auch die *vertikale Vorticityadvektion* (3. Term auf der linken Seite), weil die relative Vorticity sich vertikal nicht ändert, wenn das Geschwindigkeitsfeld vertikal konstant ist und die Erdvorticity vertikal immer konstant ist. Man beachte, dass unter diesen Annahmen Vertikalgeschwindigkeit noch möglich ist, das heißt Ausfließen nach unten ist möglich. Der  $\beta$ -Effekt (die Breitenabhängigkeit des Coriolis-Parameters) sei

von vornherein vernachlässigt. Die so vereinfachte *barotrope Vorticitygleichung* lautet wegen der Zusammenfassung der Vorticityadvektion und des Divergenzterms zum Vorticityflusterm:

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \nabla_h \cdot (\eta \mathbf{v}_h) = 0. \quad (2)$$

Integriert man Gl. 2 über die gesamte horizontale Fläche des Modellbehälters und wendet die zweidimensionale Variante des Integralsatzes von Gauss an und berücksichtigt, dass der Rand nicht durchströmt werden kann, dann folgt:

$$\iint_A \frac{\partial \eta}{\partial t} dA + \oint_C (\eta \mathbf{v}_h) \cdot d\mathbf{n} = \iint_A \frac{\partial \eta}{\partial t} dA = 0$$

bzw. mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$\bar{\eta} A = (\bar{\zeta} + f) A = \text{const}. \quad (3)$$

Der Strich über den Größen bedeutet dabei das Flächenmittel über den Integrationsbereich. *Das Produkt aus absoluter Vorticity und Querschnittsfläche bleibt zeitlich konstant.* Da die oberste Flüssigkeitsschicht sich irgendwann durch den Abfluss zwingen muss, bedeutet das  $f A_o = (\bar{\zeta}_u + f) A_u$  bzw.

$$\bar{\zeta}_u = f \frac{A_o - A_u}{A_u} \approx f \frac{A_o}{A_u} = f \frac{r_o^2}{r_u^2}. \quad (4)$$

Für die Tangentialgeschwindigkeit am Flächenrand gilt in etwa, wenn man obige Beziehung in  $V \approx \zeta r_u$  einsetzt:

$$V_u \approx f \frac{r_o^2}{r_u}. \quad (5)$$

### 3 Ergebnisse

Die unten angeführte Tabelle zeigt mögliche Wertepaare gemäß Beziehung (5), wobei der Beckenradius mit  $r_o$  identifiziert werden kann, und der Radius der Abflussöffnung mit  $r_u$ :

	$r_o$ [m]	$r_u$ [cm]	$V_u$ [cm/s]
Swimmingpool	10	20	5
Whirlpool	1	10	0,1
Washbecken	0,25	2,5	0,025
Test-Trichter	1	1,0	1

Wie leicht erkennbar, ist der Effekt nirgends wirklich berausend, kann aber unter sehr kontrollierten Bedingungen im Labor erreicht werden (siehe Shapiro, 1961-1967, 1972, 2008, im Video *Vorticity, Part 2* in etwa ab Minute 20).

Wie sieht es im Badezimmer aus? – Schon eine minimale Abweichung vom Ruhezustand mit einer antizyklonalen Tangentialströmung an der Berandung eines Waschbeckens von  $9 \text{ cm/h}^1$  kann den zyklonalen Ruhezustand zerstören. Kaum vorstellbar, dass Schwankungen dieser Größenordnung unter realen Bedingungen verhindert werden können. Als *völlige Fälschung* können jene *Vorfürhungen für Touristen* bezeichnet werden (z.B. TheLazyInvestor, 2012)<sup>2</sup>, die anhand der Abflusswirbel von Waschbecken wenige Meter nördlich und südlich

<sup>1</sup>Ergänzung vom 18. Nov. 2018 (explizitere Begründung der Abschätzung):  $|\zeta| \approx V/r_o \geq |f|$  bzw.  $V \geq |f|r_o = 0,25 \times 10^{-4} \text{ m/s} = 25 \mu\text{m/s} = 1,5 \text{ mm/min} = 9 \text{ cm/h}$ .

<sup>2</sup>Man beachte, wie die Dame im Video in der Demonstration direkt an „ihrem“ Äquator das Wasser vor dem Auslassen einigermaßen zur Ruhe kommen lässt (siehe ab Minute 00:50), während sie es abseits davon deutlich weniger genau nimmt und der Strömung durch das Eingießen eine eindeutige Anfangsvorticity gibt (z.B. ab Minute 2:05).

des vermuteten Äquators die Hemisphäre bestimmen wollen. Wegen des nahezu verschwindenden Coriolisparameters<sup>3</sup> ist ein *Einfluss der Erdrotation ausgeschlossen*.

## 4 Zusammenfassung

1. Die Erdvorticity beeinflusst nicht den Abflusswirbel von üblichen Waschbecken und Badewannen.
2. Unter sehr kontrollierten Laborbedingungen (hinreichend großes Becken, sehr ruhig, kleine Ausflussöffnung, viel Zeit) ist es aber möglich.

Beachtlich ist die Beharrlichkeit, mit der sich die Legende von Punkt 1 auch unter Gebildeten bis hin zu Physik-Lehrern hält. Ein Grund dafür ist sicher die konzeptionelle Einfachheit der vermeintlichen Erklärung.<sup>4</sup>

## Symbole

$A, A_u, A_o$	Querschnittsflächen
$C$	Geschlossene Kurve über die Berandung
$f = 2\Omega \sin \varphi$	Coriolisparameter ( $\Omega$ .. Kreisfrequenz der Erdrotation)
$\mathbf{f}_r$	Reibungskraft (pro Masseneinheit)
$\mathbf{k}$	Einheitsvektor in z-Richtung (in Richtung des lokalen Zenits)
$L$	Längen-Scale
$r, r_u, r_o$	Radii der Querschnittsflächen
$Ro$	Rossby-Zahl
$U$	Geschwindigkeits-Scale
$\mathbf{v}_h$	horizontale Geschwindigkeit
$V$	Betrag der Tangential-Geschwindigkeit
$w$	Vertikalkomponente der Geschwindigkeit
$\eta = \zeta + f$	absolute Vorticity als Summe der relativen und der Erd-Vorticity
$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$	relative Vorticity

## Literatur

Helmut Pichler. *Dynamik der Atmosphäre*. Spektrum Hochschultaschenbuch. Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin-Oxford, 1997.

Asher H. Shapiro. *NCFMF - National Committee for Fluid Mechanics Films*. web.mit.edu/hml/ncfmf.html, 1961-1967, 1972, 2008.

TheLazyInvestor. *Ecuador At The Equator - Water Demonstration - Coriolis Effect: The Coriolis Effect explains how water will drain counterclockwise, clockwise or straight down, depending where you are on the Earth ...* www.youtube.com/watch?v=4IIvfoDuVIw, 2012.

<sup>3</sup>Wenige Meter abseits des Äquators beträgt der Coriolisparameter  $|f| = 2\Omega |\sin \varphi| \approx 1,4 \times 10^{-4} \sin(0,0001) \text{ s}^{-1} \approx 2 \times 10^{-9} \text{ s}^{-1}$ . Das heißt, wenige Nanometer pro Sekunde Tangentialgeschwindigkeit stören das Erdvorticityfeld bereits erheblich.

<sup>4</sup>Aus ebensolchen Gründen hält sich auch unter vielen erdwissenschaftlich Gebildeten das Konzept der sogenannten „thermodynamischen“ Föhntheorie (feuchtadiabatisches Steigen im Luv - trockenadiabatisches Sinken im Lee) gegenüber der wahrheitsnäheren Theorie mit der blockierenden relativen Kaltluft im Luv und der sinkenden potenziellen Warmluft im Lee.