Coriolis- und Zentrifugalkraft

Eine Herleitungsskizze

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 30.August 2018

Es folgt eine Herleitung der Scheinkräfte *Corioliskraft* und *Zentrifugalkraft*, die beim Übergang von einem starren in ein konstant rotierendes Bezugssystem auftreten. Formale Herleitungen für die auftretenden Scheinkräfte in einem rotierendem Bezugssystem finden sich in fast allen Lehrbüchern für theoretische Meteorologie, so beispielsweise in deutscher Sprache in jenen von Pichler (1997) bzw. Hantel (2013).

1 Mathematische Vorbemerkungen

Für orthonormale Einheitsvektoren im ortsfesten dreidimensionalen Bezugssystem gilt:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \ .$$

Ebenso gilt für die entsprechenden Einheitsvektoren im starr rotierenden Bezugssystem:

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} = \mathbf{i} \times \mathbf{j} \ ,$$

wobei das System mit der Kreisfrequenz Ω um die Achse in Richtung von $\mathbf{i}_3$ bzw. $\mathbf{k}$ rotiere:

$$\boldsymbol{\Omega} = \Omega \mathbf{e}_3 = \Omega \mathbf{k}. \tag{1}$$

Betrachten wir nun den rotierenden Einheitsvektor $\mathbf{i}$. Für ihn gilt für den Betrag (Abbildung 1):

$$|\mathrm{d}\mathbf{i}| = \mathrm{d}\varphi |\mathbf{i}| = \Omega \mathrm{d}t \underbrace{|\mathbf{i}|}_{1} \ .$$

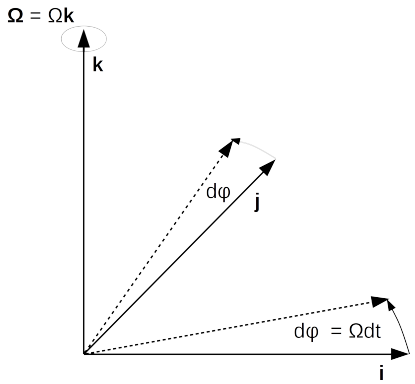


Abbildung 1: Um $\mathbf{k}$ rotierendes Bezugssystem.

Die Richtung der Änderung von $|d\mathbf{i}|$ verläuft tangential, also normal zum Radius in $\mathbf{j}$-Richtung:

$$d\mathbf{i} = \Omega \mathrm{d}t \ \mathbf{j} = \Omega \mathrm{d}t \ \mathbf{k} \times \mathbf{i} \ .$$

Daraus folgt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t} = \Omega \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{i} \ .$$

Was für $\mathbf{i}$ gilt, gilt auch für $\mathbf{j}$ und trivialerweise auch für $\mathbf{k}$ ($d\mathbf{k}/dt = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$, $\mathbf{k}$ rotiert nicht). Darüber hinaus erkennt man, dass für jeden beliebigen rotierenden Einheitsvektor $\mathbf{m}$ ebenso gilt:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{m}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{m} \ .$$

Ein beliebiger Vektor $\mathbf{A}$ ist unabhängig vom Bezugssystem:

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k}$$

Bei der zeitlichen Ableitung des Vektors bezüglich des absoluten Bezugssystems ist zu berücksichtigen, dass die Basisvektoren des rotierenden Bezugssystems nicht mehr zeitlich konstant sind:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}A_1}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_1 + \frac{\mathrm{d}A_2}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_2 + \frac{\mathrm{d}A_3}{\mathrm{d}t}\mathbf{e}_3 = \\ &= \underbrace{\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{d}A_y}{\mathrm{d}t}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{d}A_z}{\mathrm{d}t}\mathbf{k}}_{\mathrm{d_r}\mathbf{A}/\mathrm{d}t} + \underbrace{A_x \frac{\mathrm{d}\mathbf{i}}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{\Omega}\times A_x\mathbf{i}} + \underbrace{A_y \frac{\mathrm{d}\mathbf{j}}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{\Omega}\times A_y\mathbf{j}} + \underbrace{A_z \frac{\mathrm{d}\mathbf{k}}{\mathrm{d}t}}_{\boldsymbol{\Omega}\times A_z\mathbf{k}} \ . \end{aligned}$$

Zusammen gefasst gilt für jeden Vektor beim Übergang vom festen zum rotierenden kartesischen Koordinatensystem

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_r}\mathbf{A}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} \ ,$$

bzw. in Operatorschreibweise

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \ . \tag{2}$$

2 Herleitung der Scheinkräfte

Mit Hilfe von Gleichung (2) erhält man für die Absolutgeschwindigkeit $\mathbf{v}$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d_r}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}, \text{ bzw.}$$

$$\underbrace{\mathbf{v}}_{\text{Abs.-Geschw.}} = \overbrace{\mathbf{v}_\mathrm{r}}^{\text{Rel.-Geschw.}} + \underbrace{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}}_{\text{Führungs-Geschw.}} \ , \tag{3}$$

das ist die Summe aus Relativgeschwindigkeit bezüglich des rotierenden Bezugssystems und Führungsgeschwindigkeit zufolge der Rotation des Bezugssystems. Man bilde nun von Gl. (3) die zeitliche Ableitung für das ortsfeste (absolute) Bezugssystem:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} + \Omega \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \\ &= \left[\frac{\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} + \Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r}\right] + \Omega \times \left[\frac{\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} + \Omega \times \mathbf{r}\right] \\ &= \frac{\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} + \Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r} + \Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r} + \Omega \times \Omega \times \mathbf{r}\end{aligned}$$

bzw. zusammengefasst:

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} + 2\,\Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r} + \Omega \times \Omega \times \mathbf{r}. \tag{4}$$

Berücksichtigt man nun im Zweiten Newtonsche Gesetz $M\mathrm{d}\mathbf{v}/dt = \sum \mathbf{F}_i$ die Kräfte massenspezifisch $\mathbf{f}_i = \mathbf{F}_i/M$ und löst die Gleichung (4) nach dem rotierenden Bezugssystem auf, dann erhält man als *Bewegungsgleichung für das rotierende Bezugssystem*[1]:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}_\mathrm{r}\mathbf{v}_\mathrm{r}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{-2\,\Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r}}_{\text{Corioliskraft}}\ \underbrace{-\Omega \times \Omega \times \mathbf{r}}_{\text{Zentrifugalkraft}} + \sum \mathbf{f}_i}. \tag{5}$$

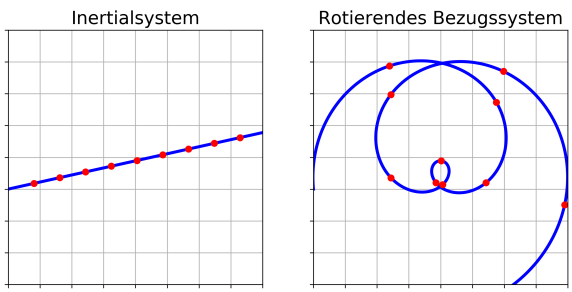
Die oben benannten Kräfte sind *Scheinkräfte*, weil sie nur im rotierenden (d.h. beschleunigten) Bezugssystem in Erscheinung treten. Sie sind erforderlich, um eine im absoluten Rahmen beschleunigungsfreie gleichförmige Bewegung im rotierenden Bezugssystem formal erklären zu können.

Die *Corioliskraft*[2] wirkt normal zur Relativgeschwindigkeit bezüglich des rotierenden Bezugssystems und normal zur Rotationsachse:

$$\mathbf{C} = -2\,\Omega \times \mathbf{v}_\mathrm{r}. \tag{6}$$

Die *Zentrifugalkraft*[2] ist unabhängig von der Relativgeschwindigkeit und ist nur abhängig vom Ort. Sie weist normal zur Rotationsachse nach außen und ist proportional dem Quadrat der Kreisfrequenz Ω:

$$\mathbf{Z} = -\Omega \times \Omega \times \mathbf{r}. \tag{7}$$



Zur Veranschaulichung zeigt obige Abbildung die Trajektorie einer gleichförmigen kräftefreien Bewegung von links nach rechts einmal im (ruhenden) Inertialsystem, das andere mal im *gegen den Uhrzeigersinn* rotierenden Bezugssystem. Die roten Punkte markieren jeweils gleiche Zeitdifferenzen. In der rechten Grafik erscheint einerseits die *rechtsablenkende Wirkung der Corioliskraft* und andererseits die *beschleunigende Wirkung der Zentrifugalkraft*, die mit wachsender Entfernung vom Rotationszentrum zunimmt, erkenntlich am wachsenden Abstand zwischen den Zeitpunkten. Darin zeigt sich die *kombinierte Wirkung beider Scheinkräfte*.

In den üblichen Formulierungen für die *Navier-Stokes-Gleichung* in der GFD[3] kann die Zentrifugalkraft als rein ortsabhängige Kraft zur Erdanziehungskraft hinzugezählt (bzw. abgezogen) werden und ergibt so die Schwerkraft im rotierenden Bezugssystem. Die Zentrifugalkraft tritt daher nicht mehr explizit in Erscheinung. Die Geopotenzialflächen haben dann keine Kugelform, sondern die eines Geoids. Dieser Umstand verschleiert jedoch, dass man aus Verständnisgründen Corioliskraft und Zentrifugalkraft als Scheinkräfte nicht getrennt betrachten kann. Sie treten immer als Paar auf und sind als solches zu verstehen.

Symbole

$\mathbf{A}$	allgemeiner Vektor abhängig von Ort und Zeit
A_1, A_2, A_3	kartesische Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ im ortsfesten Bezugssystem
A_x, A_y, A_z	kartesische Komponenten des Vektors $\mathbf{A}$ im rotierenden Bezugssystem
$\mathbf{C}$	Corioliskraft pro Masseneinheit
$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$	Zeitableitung bezüglich des ortsfesten Bezugssystems
$\mathrm{d}_\mathrm{r}/\mathrm{d}t$	Zeitableitung bezüglich des rotierenden Bezugssystems
$\mathrm{d}\varphi$	infinitesimale Auslenkung eines rotierenden Basisvektors
$\mathbf{e}$	allgemeiner Einheitsvektor im rotierenden System
$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$	kartesische Einheitsvektoren im ortsfesten System
$\mathbf{F}_i$	Kraft i
$\mathbf{f}_i$	massenspezifische Kraft i
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	kartesische Einheitsvektoren im rotierenden System
M	Masse
$\mathbf{r}$	zeitabhängiger Ortsvektor
$\mathbf{v}$	Geschwindigkeit im ortsfesten Bezugssystem
$\mathbf{v}_\mathrm{r}$	Geschwindigkeit im rotierenden Bezugssystem
$\mathbf{Z}$	Zentrifugalkraft pro Masseneinheit
Ω	Vektor der Kreisfrequenz des rotierenden Bezugssystems

Literatur

Michael Hantel. *Einführung Theoretische Meteorologie.* Springer Spektrum. Springer Verlag Berlin-Heidelberg, 2013.

Helmut Pichler. *Dynamik der Atmosphäre.* Spektrum Hochschultaschenbuch. Spektrum Akademischer Verlag GmbH Heidelberg-Berlin-Oxford, 1997.

[1] Beschleunigung der Relativgeschwindigkeit relativ zum rotierenden Bezugssystem

[2] genauer: *Kraft pro Masseneinheit*

[3] GFD: *Geophysical Fluid Dynamics*