Taylor-Proudman Theorem

Dietmar Thaler

dietmar.thaler@posteo.at

Admont, 10. August 2018

Das **Taylor-Proudman Theorem** besagt, dass eine schwache Relativströmung in einem stark rotierendem Bezugssystem (mit sehr kleiner Rossby-Zahl[1] $Ro = U/(\Omega L) \ll 1$) für ein inkompressibles und reibungsfreies Medium quasihorizontal ist. Das heißt, dass die Vertikalgeschwindigkeit verschwindet und die Horizontalgeschwindigkeit keine vertikale Änderung aufweist. - Da dieser einfache Satz der Strömungsmechanik der üblichen meteorologischen Ausbildung nahezu unbemerkt entwischt, hier ein kurzer Abriss dazu.

1 Grundlagen

Ausgangspunkt ist gemäß Hoskins and James (2014), Seite 61 ff., die *Navier-Stokes Gleichung* (dreidimensionale Bewegungsgleichung) für ein mit der Kreisfrequenz $\boldsymbol{\Omega}$ rotierendes Bezugssystem:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -2\Omega \times \mathbf{v} - \frac{1}{\rho}\nabla p - \nabla\Phi - \mathbf{f_r}. \tag{1}$$

und die Kontinuitätsgleichung für eine dreidimensionale (i.A. kompressible) Strömung

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = 0. \tag{2}$$

2 Annahmen

1. Die Führungsgeschwindigkeit aufgrund der starren Rotation des Bezugssystems $\mathbf{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}$ sei viel größer als die Relativgeschwindigkeit der Strömung bezogen auf das rotierende Bezugssystems. Das bedeutet, dass die Rossby-Zahl viel kleiner als eins ist

$$Ro = \frac{U}{\Omega L} \ll 1, \tag{3}$$

   und der individuelle Beschleunigungsterm daher sehr klein gegen die Corioliskraft ist.

2. Unter der Annahme konstanter Dichte ($\rho_0 = \text{const}$) reduziert sich die Kontinuitätsgleichung auf die inkompressible Form

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{4}$$

3. Reibung sei vernachlässigt: $\mathbf{f_r} \approx 0$.

[1] Zur Erinnerung: Die Rossby-Zahl ist das Verhältnis von Trägheitskraft zu Corioliskraft in einer Strömung.

3 Das Theorem

Mit den obigen Annahmen degeneriert die Bewegungsgleichung zu einer quasi-stationären inkompressiblen diagnostischen Beziehung (Gl. 7 auf der nächsten Seite). Bildet man davon die Rotation ($\nabla\times$) und berücksichtigt die Inkompressibilität und einige Identitäten der Vektoranalysis, dann erhält man für die Vertikalkomponente (in Richtung von Ω) und die Horizontalkomponente des relativen Geschwindigkeitsfeldes (Gl. 9 auf der nächsten Seite):

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \tag{5}$$

Berücksichtigt man weiters, dass die untere Berandung nicht durchströmt werden kann, dann folgt

$$\begin{aligned} w(x,y,z) &\equiv 0 \\ \mathbf{v}_{\mathrm{h}}(x,y,z) &= \mathbf{v}_{\mathrm{h}}(\mathrm{x},\mathrm{y}). \end{aligned} \tag{6}$$

Das heißt: *Die Vertikalgeschwindigkeit verschwindet und die Horizontalgeschwindigkeit ist vertikal konstant (und hängt nur von x, y ab).* Dies ist ein einigermaßen verblüffendes und kontraintuitives Ergebnis. Es besagt, dass inkompressible und reibungsfreie Strömungen im stark rotierenden Bezugssystems quasi zweidimensional sind.

4 Empirischer Befund

Grundlage ist eine mit Wasser gefüllte rotierenden Pfanne, in der das Wasser nach einiger Zeit bezüglich der Pfanne zur Ruhe kommt, also starr mit rotiert.

1. Wenn man mit einem mit Tinte der Länge nach eingefärbten Stift in das starr rotierende Wasser fährt und die Strömung ein wenig stört, dann bilden sich farbige Schleier, die in horizontaler Richtung gemäß der Strömung variieren, deren Vertikalstruktur aber angenähert konstant bleibt und als *ink sheets* in Erscheinung treten.

2. Bringt man am Boden des Gefäßes einen kleinen Zylinder an und sorgt für eine geringe Störung des Strömungsfeldes, muss die bodennahe Strömung um diesen Zylinder herum strömen. Aufgrund des Taylor-Proudman Theorems muss sie das dann aber auch über die gesamte Höhe der Strömung ($\partial\mathbf{v_h}/\partial z = 0$). Oberhalb des Zylinder stagniert die horizontale Strömung daher ebenfalls. Man kann dies durch das Einbringen von z.B. Sägespänen an der Oberfläche sichtbar machen. Es bilden sich *Taylor columns.*

Lässt sich das Theorem auf die Atmosphäre anwenden? - So gut wie nicht. Für die in Frage kommenden Scales ist die Atmosphäre entweder zu kompressibel oder die Rossby-Zahl ist nicht hinreichend klein oder die Bodenreibung ist nicht vernachlässigbar. Nachdem vertikale Windscherungen für die Atmosphäre so gut wie normal sind, lässt sich umgekehrt daraus schließen, dass Dichtevariationen (bzw. wegen der Gasgleichung äquivalente Temperaturvariationen), also die vertikale Schichtung des Fluidums, für die Atmosphäre neben der Rotation des Bezugssystems von großer Bedeutung sind.

In den *Ozeanen* wurden im Fall einer meeresbodennahen Strömung um Hindernissen herum entsprechende *Taylor columns* berichtet (Seelye and Ducker, 1997). Aber auch im Ozean sind wie in der Atmosphäre vertikale Schichtungen von großer Bedeutung. Formal äußert sich das darin, dass die Boussinesq-Approximation gilt, in der Dichtevariationen in Richtung der Schwerebeschleunigung zu berücksichtigen sind.

Googeln nach dem *Taylor-Proudman Theorem* oder den *Taylor columns* bringt eine Vielzahl von Animationen zu Rotationspfannen-Experimenten.

5 Mathematische Details

Mit den Annahmen von Abschnitt 2 auf der vorherigen Seite reduziert sich die Bewegungsgleichung zu

$$0 \approx -2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} - \nabla \left(\frac{\mathrm{p}}{\rho_{\mathbf{o}}} \right) - \nabla \Phi. \tag{7}$$

Bildet man die Rotation der quasi-stationären inkompressiblen Bewegungsgleichung und berücksichtigt, dass die Rotation des Gradienten identisch verschwindet[2], dann erhält man unmittelbar

$$\nabla \times \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}.$$

Anwendung einer geläufigen Identität der Vektoranalysis (z.B. Lang and Pucker, 2005, S. 203*)*

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{b} \nabla \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} + \mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}$$

und Berücksichtigung der Tatsache, dass die Kreisfrequenz Ω konstant ist, ergibt $\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} + \boldsymbol{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. Mit der Kontinuitätsgleichung für inkompressible Flüssigkeiten (Gleichung 4 auf der vorherigen Seite) verschwindet der zweite Term und es bleibt

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0, \tag{8}$$

welches im eigentlichen Sinn das *Taylor-Proudmann Theorem* ist. Eine unmittelbare Schlussfolgerung daraus erhält man, wenn man ohne Beeinträchtigung der Allgemeinheit die Rotationsachse in Richtung der Vertikalkoordinate ($\Omega \mathbf{k}$) setzt

$$\Omega \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{v} = \Omega \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} = 0$$

(die räumlichen Ableitungen nach x bzw. y verschwinden wegen der Orthonormalitätsbeziehung $\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ usw..), und dann die Vertikalkomponente von der Horizontalkomponente separiert ($\Omega \neq 0$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{v}_h}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Die Beziehungen 9 sind eine *alternative Formulierung des Taylor-Proudman Theorems.*

[2] Sowohl das Schwerefeld Φ als auch das mit der konstanten Dichte skalierte Druckfeld p/ρ_0 sind Potenzialfelder.

Symbole

∇	Nabla-Operator (in kartesischen Koordinaten: $\mathbf{i}\,\partial/\partial x + \mathbf{j}\,\partial/\partial y + \mathbf{k}\,\partial/\partial z$)
∇_h	Zweidimensionaler Nabla-Operator (in kartesischen Koordinaten $\mathbf{i}\,\partial/\partial x + \mathbf{j}\,\partial/\partial y$)
ρ, ρ_0	Dichte des Fluidums
Φ	Geopotenzial
$\Omega, \boldsymbol{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$	Skalar bzw. Vektor der Kreisfrequenz des rotierenden Bezugssystems
$\mathbf{f}_\mathrm{r}$	Viskose Reibungskraft pro Masseneinheit
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	Einheitsvektoren im rotierenden kartesischen Koordinatensystem in x, y, z-Richtung
p	Druck um Fluidum
$\mathbf{v}$	dreidimensionaler Geschwindigkeitsvektor relativ zum rotierenden Bezugssystem
$\mathbf{v}_\mathrm{h}$	horizontaler Geschwindigkeitsvektor relativ zum rotierenden Bezugssystem
w	Vertikalkomponente der Geschwindigkeit relativ zum rotierenden Bezugssystem
$v_\Theta = \frac{d\Theta}{dz}$	generalisierte Vertikalgeschwindigkeit im Θ-System
L	horizontaler Längen-Scale der Relativströmung
U	horizontaler Geschwindigkeits-Scale der Relativströmung

Literatur

Brian J. Hoskins and Ian N. James. *Fluid Dynamics of The Midlatitude Atmosphere.* John Wiley & Sons, Ldt (Chichester), 2014.

Christoph B. Lang and Norbert Pucker. *Mathematische Methoden der Physik - 2. Auflage.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2005. ISBN 978-3-8274-3124-0.

Martin Seelye and Robert Ducker. *The effect of possible Taylor columns on the summer ice retreat in the Chukchi Sea.* Journal of Geophysical Research: Oceans (1978 - 2012), 1997.